Afin de profiter au mieux des 4 heures de la séance de manipulations, il vous est vivement recommandé de préparer soigneusement ce TP. Les enseignants sont à votre service, n'hésitez pas à les contacter pour vous aider dans cette préparation.

MESURES DE RESISTANCES II : PONT DE WHEATSTONE

Exemples de mesures de type A (mesures répétitives) et de type B (analyse systématique des incertitudes)

Le Pont de Wheatstone est une des méthodes les plus précises pour mesurer des résistances. Elle est à la base de nombreux appareils et sous-systèmes industriels et grand public. Par exemple, les cellules de mesure de lumière de certains appareils photos utilisent ce principe. **L'objet de ce TP est d'évaluer l'incertitude d'une mesure effectuée avec cette méthode et d'en analyser les causes.**

I. PRINCIPE DE LA MESURE ET DESCRIPTION DU BANC

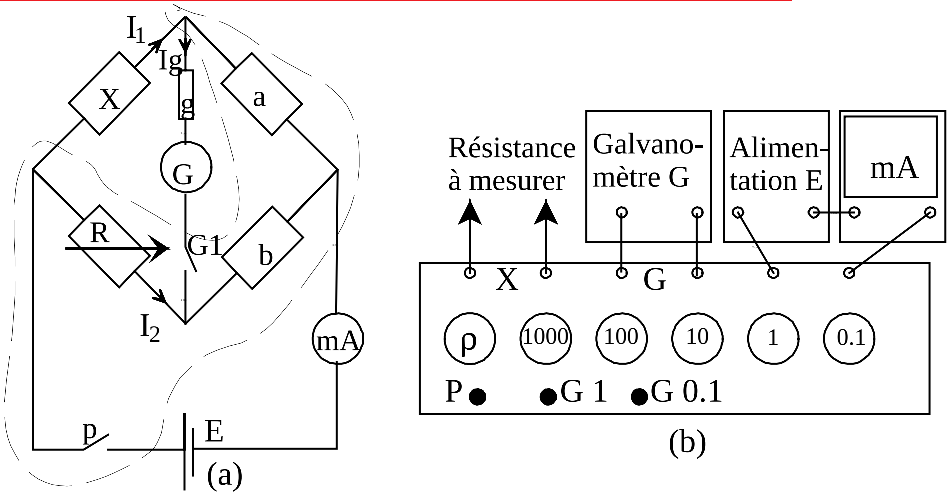

Figure 1 : (a) Schéma de principe du pont de Wheatstone . (b) Disposition des éléments du montage. Le boitier principal (b) regroupe les éléments entourés (a).

1) Circuit

Le pont de Wheatstone est constitué de 4 résistances placées en losange (figure 1):

1. X est la résistance à mesurer.
2. R est une résistance variable constituée ici de cinq résistances étalonnées placées en série et commandées par les 5 boutons marqués 1000 à 0.1 Ω.
3. a et b sont 2 résistances, telles que $\rho = \frac{a}{b}$ et $a + b = K = 1\ k\Omega$. Elles sont commandées ensemble avec bouton ρ.

Les résistances variables a et b forment la "tête de pont". Pour faciliter les calculs, ρ a pour valeur à une puissance entière de 10.

Dans une des diagonales du losange (figure 1a) est placée une source de force électromotrice (FEM), notée E. Dans l'autre diagonale se trouve un galvanomètre G, de résistance interne g, la plus faible possible.

Le pont est équilibré lorsque, les interrupteurs G_1 et P étant fermés, aucun courant mesurable ne traverse la branche du galvanomètre, c'est à dire lorsque Ig = 0. Dans ce cas, les deux extrémités de la branche du galvanomètre sont au même potentiel.

Montrez qu'alors la relation suivante est vérifiée : $\frac{X}{a} = \frac{R}{b} \Rightarrow X = \rho R$ avec $\rho = \frac{a}{b}$

2) L'incertitude des mesures

Elle dépend de la série suivante de sources d'incertitudes :

1. L'étalonnage des résistance R, a et b.
2. L'influence de certains facteurs extérieurs comme la température, les résistances de contact,...
3. La sensibilité du galvanomètre, conditionnant la plus faible variation de R décelable au cours du réglage de l'équilibre.
4. La tension d'alimentation, dont dépend le courant Ig.

Il est possible (§IV "annexe") de grouper ces incertitudes en deux catégories. D'une part l'incertitude absolue ΔX_C due aux composants (causes 1 et 2), d'autre part l'incertitude absolue ΔX_G due à la sensibilité du galvanomètre (causes 3 et 4).

L'incertitude relative due aux composants, notée $\Delta X_C/X$ peut être calculée à partir des indications du fabricant ou de l'étalonnage des appareils (§II "préparation").

L'incertitude relative due au galvanomètre, notée $\Delta X_G/X$ est délicate à calculer (§IV "annexe"). Il est plus simple de la mesurer pour un ensemble de valeurs de X et E. C'est une étape importante de la manipulation. A partir de ces mesures, vous tracerez un abaque qui permette de lire l'incertitude lors de la mesure d'une résistance quelconque.

II. PREPARATION DU TRAVAIL

1) Protection des appareils : les limitations dues à la puissance maximale admissible.

Les éléments du pont et la résistance variable servant à établir $\left(\frac{\Delta X_C}{X}\right) = f(X,E)$ (§III "Manipulations") sont des résistances supportant 0.5 W au maximum (résistances "demi-watt" ou W/2). Les résistances standards à mesurer supportent au maximum 0.25 W ("quart de watt, ou W/4). Il est utile de prévoir quelles sont les conditions de mesures qui conduiront à dépasser ces puissances. Pour une tension d'alimentation E donnée, la puissance dissipée dans chaque branche augmente quand la résistance de la branche diminue. Pour une tension E et une puissance maximale à ne pas dépasser, il y a une valeur de résistance minimale en deça de laquelle il est interdit de travailler. Il faut calculer ces résistances minimales avant d'effectuer les mesures. Rappel : $P = V\, I\, RI^2 = V^2/R$.

Une mesure à l'aide du pont de Wheatstone s'effectue toujours au voisinage de l'équilibre du pont $X = \rho R$. Pour simplifier le calcul, nous pouvons donc supposer en première approximation, que le courant circulant dans le galvanomètre est nul. Par ailleurs, les résistances a et b sont supposées négligeables devant X et R, respectivement. **Redessinez le schéma de principe** du pont en ôtant tous les éléments négligeables. Pour chaque tension de l'alimentation (§V "données numériques..."), **calculez les valeurs minimales** que peuvent prendre les résistances R (W/2) et X (W/2 ou W/4) pour les 5 valeurs de la tension E que peut fournir l'alimentation (§V : paragraphe "données numériques relatives au matériel"). **Dressez un tableau** des valeurs obtenues.

Faites vérifier ce tableau par l'enseignant au début de la séance. Pendant la manipulation, ayez toujours ce tableau sous la main pour vérifier que R ou X ne sont pas trop faibles pour pouvoir réaliser la mesure.

2) Calcul de l'incertitude due aux composants.

La moyenne <X> d'une série de mesurages identiques est une estimation de la valeur vraie de la mesure. *L'incertitude absolue ΔX d'une mesure est proportionnelle à l'écart type σ_X de l'ensemble de valeurs obtenues par des mesurages identiques. Le coefficient de proportionnalité k, tel que $\Delta X = \mathbf{k}\, \sigma_X$, dépend de la loi statistique que suit l'ensemble des mesures. Ici, vous supposerez cette loi normale et vous prendrez systématiquement k = 2 (ce qui permet de simplifier ce coefficient au cours des calculs). Une incertitude absolue ΔX résultant d'autres incertitudes $\Delta X_j = k\, \sigma_j$ indépendantes, est calculée à partir de sa variance σ_X^2. Celle-ci est une combinaison linéaire des variances σ_j^2. Les coefficients de cette combinaison sont les coefficients de la différentielle de $X = f(X_j)$, élevés au carré.*

Par exemple, nous savons que $X = \rho R$ à l'équilibre du pont. Cette relation, qui est indépendante du courant et de la tension, va nous permettre de calculer l'incertitude absolue due aux composants ΔX_C. Soit la différentielle de X :

$$dX = \left(\frac{\partial X}{\partial \rho}\right)_{R=cte} d\rho + \left(\frac{\partial X}{\partial R}\right)_{\rho=cte} dR = R d\rho + \rho dR$$

Les coefficients de dX nous permettent d'écrire la variance :

$$\sigma_X^2 = R^2\, \sigma_\rho^2 + \rho^2\, \sigma_R^2$$

Soit, après calcul, l'incertitude absolue due aux composants :

$$\Delta X_C = \sqrt{R^2\, \Delta\rho^2 + \rho^2\, \Delta R^2}$$

A vous d'établir l'expression de l'incertitude relative $\Delta X_C/X$. Vous pouvez aussi reprendre le calcul au début en établissant la dérivée logarithmique de X.

Dans cette expression $\Delta\rho/\rho$ vous est donnée (§V), mais vous avez besoin de calculer $\Delta R/R$. Ce calcul se fait de manière similaire à celui de $\Delta X_C/X$, à partir de l'expression de R en fonction des 5 résistances en série qui la composent :

$$R = \sum_{j=1}^{5} R_j = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$$

Connaissant l'incertitude relative de chaque élément de R et celle de ρ (§V), **calculez l'incertitude relative due aux composants** $\left(\frac{\Delta X_C}{X}\right)$ dans le cas de la mesure d'une résistance X = 8343.5 Ω (dans ce cas, ρ = 1). Quelles approximations sont possibles ? $\left(\frac{\Delta X_C}{X}\right)$ varie-t-elle beaucoup avec X ?

III. MANIPULATION

1) Lecture des résistances

Trois résistors standards (W/4) sont à votre disposition, soudés sur un circuit imprimé. Effectuez une lecture des bagues de couleur de ces composants et regroupez dans un tableau ces **valeurs nominales** assorties des incertitudes absolues (au format r ± Δr) et relatives annoncées par le fabricant

2) Montage

Réalisez le montage (figure 1) en respectant les polarités indiquées sur les appareils. Le courant de l'alimentation stabilisée sera **toujours limité à 40 mA**. Si vous déplacez le galvanomètre, veillez toujours **à bloquer son attelage mobile**. Vous prendrez pour brancher X **les fils les plus courts possibles**, pour pouvoir négliger leur résistance propre.

3) Etapes du mesurage d'une résistance

1. Suivant ce que vous savez de X (code de couleur ou indications imprimées), choisissez R et ρ de telle sorte que R soit le plus grand possible. La valeur de R doit comporter au moins cinq chiffres significatifs ($1100.0 \leq R \leq 10999.9$).
2. Vérifiez que les valeurs des résistances R et X sont compatibles avec la tension d'alimentation E.
3. X étant branché, fermez le contact P seul, vérifiez que I_1+I_2 ne dépasse pas la valeur maximale imposée (40 mA). Si I_1+I_2 est trop grand, le mesurage n'a aucun sens car son incertitude dépend du limiteur de courant de l'alimentation.
4. Choisissez le calibre 1µA du galvanomètre et libérez son atelage mobile.
5. Fermez ensuite simultanément les contacteurs P et $G_{0.1}$. Ce dernier ne laisse passer qu'un dixième du courant de déséquilibre I_g, pour protéger le galvanomètre. Si le galvanomètre dévie beaucoup, le pont est très déséquilibré. Vérifiez alors chaque paramètre. Si tout est correct, P et $G_{0.1}$ étant fermés, modifiez R jusqu'à ce que le galvanomètre ne dévie plus.
6. Fermez maintenant P et G_1 et à nouveau, modifiez R jusqu'à ce que le galvanomètre ne dévie plus. Le pont est alors équilibré.
7. Lisez la valeur de R, notez la valeur de $X = \rho R$.

4) Evaluation statistique de l'incertitude de mesure : Méthode de type A

Une méthode pour évaluer l'incertitude totale d'une mesure consiste à réaliser une série de mesurages pratiquement identiques. **La moyenne** des valeurs obtenues approche la valeur vraie de la mesure. L'incertitude de la mesure est **l'écart-type** de l'ensemble des valeurs, affectée d'un coefficient conventionnel (k = 2 actuellement). Cette méthode, dite de **type A** est utilisée par les laboratoires de métrologie.

Choisissez un seul des résistors standards (W/4) à votre disposition. Effectuez dix mesurages de sa résistance, sous une alimentation de 3 V. **Entre deux mesurages successifs, replacez le pont dans son état initial** (R choisi en fonction de la valeur nominale de X), **débranchez-rebranchez X et changez d'expérimentateur**. Dressez un tableau des valeurs obtenues. Calculez la moyenne et l'écart-type de l'ensemble des mesures. Présentez la valeur de la résistance avec son incertitude absolue et calculez son incertitude relative.

5) Evaluation déductive de l'incertitude de mesure : Méthode de type B

L'autre méthode pour évaluer l'incertitude d'une mesure consiste à recenser les causes d'erreurs, à évaluer (à partir de mesures préalables ou de données fournies) l'incertitude dont chacune est responsable et à composer celles-ci pour évaluer l'incertitude totale. C'est la méthode que vous avez utilisée en préparant ce TP pour calculer $\left(\frac{\Delta X_C}{X}\right)$. Pour connaître l'incertitude relative totale $\frac{\Delta X}{X} = \frac{1}{X}\sqrt{\sigma_X{}^2} = \frac{1}{X}\sqrt{\sigma_C{}^2 + \sigma_G{}^2}$, il nous faut maintenant évaluer l'incertitude relative due au galvanomètre $\left(\frac{\Delta X_G}{X}\right)$ pour connaître l'écart-type σ_G et sa variance.

6) Courbes de l'incertitude due au galvanomètre

Cette incertitude est délicate à calculer (paragraphe IV). Vous allez l'évaluer à l'aide d'une résistance variable étalonnée (A.O.I.P.*) telle que $X \in \{10^2,10^3,10^4,10^5,10^6\ \Omega\}$ et pour deux valeurs de tension d'alimentation $E \in \{3,12\text{ V}\}$. Pour chaque E, les courbes $(\Delta X_G/X) = f(X)$ seront ensuite interpolées. Les valeurs de X et $(\Delta X_G/X)$ seront aussitôt reportées sur la courbe. En raison de l'évolution rapide des deux variables, les courbes seront tracées sur du papier "logarithmique-logarithmique" (log-log) à 4 modules.

a) Evaluation de l'incertitude due au galvanomètre $\left(\frac{\Delta X_G}{X}\right)$

Le pont ayant été précédemment équilibré pour une résistance X, il s'agit d'évaluer quelle variation ΔX produit sur le galvanomètre une déviation d'une demi-division (soit 0.1 µA ici sur le calibre 1 µA). Comme la lecture d'une demi-division est problématique, il suffira de faire dévier le galvanomètre d'une division, le ΔR obtenu sera divisé par 2 dans le calcul.

1. Fermez P et G1 et modifiez R jusqu'à ce que le galvanomètre dévie d'une division
2. Lisez ΔR, déduisez-en ΔX_G, sachant que ρ n'a pas varié.

b) Procédure pour établir les courbes $\left(\frac{\Delta X_G}{X}\right) = f(X,E)$

Pour chaque valeur de X et de E, mesurez X, puis ΔX_G. Déduisez-en $(\Delta X_G/X)$ et reportez les grandeurs importantes dans un tableau comme celui-ci, avec $(\Delta X_G/X) = \rho\Delta R/2X$:

E (V)	X (Ω) Nom.	ρ	Σ I (mA)	R (Ω)	R' (Ω)	ΔR (Ω)	$\left(\frac{\Delta X_G}{X}\right)$
12	10^3	0.1	12	9988.5	9989.5	1	$5\ 10^{-5}$
3	10^3	0.1	...				

Reportez X et $(\Delta X_G/X)$ sur le graphe. Une fois les points placés sur le graphe, interpolez les courbes pour chaque valeur de E. Cet ensemble de deux courbes constitue un abaque qui permet de lire $(\Delta X_G/X)$ pour toute valeur de X et de E

7) Utilisation de l'abaque : mesures de résistances

Pour les trois résistors standards (W/4) fournis, mesurez à l'aide du pont de Wheatstone, leur résistance en choisissant E pour minimiser l'erreur relative totale sans abîmer X. Reportez chaque valeur sur l'abaque et lisez l'erreur relative due au galvanomètre en traçant les projections du poits. Reportez dans un tableau $X + \Delta X$ et $(\Delta X_G/X)$.

8) Amélioration de l'abaque avec $\left(\frac{\Delta X_C}{X}\right)$

Reprenez les expressions otenues lors de la préparation de ce travail. Calculez les valeurs de $(\Delta X_C/X)$ pour X variant de 10^6 à $10^2\ \Omega$. Dressez un tableau reprenant $\left(\frac{\Delta X_C}{X}\right)$, $\left(\frac{\Delta X_G}{X}\right)$ et $\left(\frac{\Delta X}{X}\right)$ pour chaque valeur de X et E. Complétez le graphe avec les courbes de $(\Delta X/X)_C$ en fonction de X.

IV. ANNEXE : CALCUL DE $(\Delta X_G/X)$

(facultatif mais formateur)

Nous avons établi expérimentalement $(\Delta X_G/X)= f(X)$, mais il est possible de le calculer à partir de ΔI, la plus petite variation de $I = I_G$. Ce calcul justifie aussi la séparation de ΔX_G et ΔX_C

1. Etablissez les 4 lois aux mailles du circuit en supposant $I = I_G$ négligeable devant I_1 et I_2 (figure 1).
2. Déduisez-en que $I = \frac{E}{2g}\left(\frac{a-X}{a+X} + \frac{R-b}{R+b}\right)$
3. Retrouvez que $\boxed{X = a\,\frac{RE - gI(b+R)}{bE - gI(b+R)}}$
4. Exprimez la dérivée partielle de X par rapport à I, $(\partial X/\partial I)$.
5. Montrez que si I = 0, alors $\boxed{\left(\frac{\Delta X_G}{X}\right) = \Delta I\,\frac{g}{E}\left(\frac{X^2 - a^2}{aX}\right)}$
6. Dressez le tableau des variation de $(\Delta X_G/X)$ en fonction de X ($a \approx$ cte) et comparez-le avec la courbe expérimentale.
7. Calculez $(\partial X/\partial E)$ et montrez que si I = 0, ce terme s'annule.
8. Calculez de même $(\partial X/\partial R)$, $(\partial X/\partial a)$, $(\partial X/\partial b)$ et montrez que si I = 0, vous retrouvez bien l'expression de $(\Delta X_C/X)$

V. DONNEES NUMERIQUES RELATIVES AU MATERIEL

1) Pont de Wheatstone

Résistance	Bouton (Ω)	Etalonnage ($\Delta R_j/R_j$)	Courant maximal (mA)
R_5	10×1000	$5\ 10^{-4}$	20
R_4	11×100	$5\ 10^{-4}$	65
R_3	11×10	$5\ 10^{-4}$	200
R_2	11×1	$1\ 10^{-3}$	650
R_1	11×0.1	$5\ 10^{-3}$	1000

Tableau 1 :Etalonnage des éléments de R.

R est constitué de cinq résistances en série ayant chacune fait l'objet d'un étalonnage (tableau 1).

La tête de pont ρ peut prendre 7 valeurs de 10^{-3} à 10^3. La précision de l'étalonnage des résistance a et b est telle que : $\frac{\Delta\rho}{\rho} \leq 8.2\ 10^{-4}$. De plus, a et b sont telles que $a + b = 1k\Omega$ quel que soit ρ.

2) Galvanomètre

C'est un appareil à plusieurs sensibilités. Utilisez toujours la plus grande sensibilité : 1 µA. Dans ces conditions, 1 division (2 mm) correspond à 100 nA. Résistance interne du galvanomètre : g = 3.5 kΩ (Ce galvanomètre est mal adapté aux mesures à base de pont de Wheatstone : sa résistance interne est trop élevée. Ce choix *volontaire* facilite la mesure de l'incertitude due au galvanomètre).

3) Alimentation

Elle fournit au choix 5 tensions fixes : 3, 5, 6, 9 ou 12 V. Le courant débité peut être limité à *environ* : 8, 40, 150 ou 600 mA. **Ici vous choisirez toujours de limiter le courant à environ 40 mA**.

VI. MATERIEL NECESSAIRE

1. Pont de Wheatstone (A.O.I.P.* B9R)
2. Galvanomètre (SEFRAM GTA1)
3. Milliampèremètre continu (Metrix 493)
4. Alimentation stabilisée à points fixes
5. Boite de résistances 0 à $10^6\Omega$ (A.O.I.P.)
6. Plaquette de résistances

(* A.O.I.P. : Association des Ouvriers en Instruments de Précision).