CORRIGE DE METROLOGIE

Durée : 2 heures ; une calculatrice électronique autorisée ; tout document et téléphone portable interdits.

Vous rendrez l'exercice II sur une copie indépendante.

I. ENUMERATION DES SOURCES D'INCERTITUDES (2 pts)

1. Méthode ; Moyens ; Main d'œuvre ; Milieu ; Matériau

III. TRIANGULATION TERRESTRE (9 pts)

1.

grandeur	unités	variable x	valeur	distrib.	élargiss. k_x	incertitude U_x	inc.-type u_x	inc.-type relative u_x/x
base	mètres	b	5631	normale	2	*3*	*1.5*	*2.66E-04*
angle à gauche	radians	β	*1.246*	normale	2	*0.000145*	*7.272E-05*	*5.84E-05*
angle à droite	*radians*	γ	*1.439*	*normale*	*2*	*0.000145*	*7.272E-05*	*5.05E-05*
ang. au sommet	*radians*	α	*0.4568*	*normale*	*2*	*0.000206*	*0.0001028*	*2.25E-04*
distance	*mètres*	*a*	*12656*	*normale*	*2*	*8.578*	*4.289*	*3.39E-04*

2. L'angle au sommet α se calcule ainsi : $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ⇒ $\alpha = \pi - \beta - \gamma$ ⇒ $\underline{\alpha = 0.4568 \text{ rad}}$
3. Ce qui permet d'exprimer la différentielle de l'angle au sommet : $d\alpha = - d\beta - d\gamma$
4. D'où nous déduisons l'incertitude-type sur l'angle au sommet : $u_\alpha = \sqrt{(u_\beta)^2 + (u_\gamma)^2}$

* Les coefficients d'élargissement k_β et k_γ permettent le calcul des incertitudes-type sur β et γ, sachant que l'hypothèse normale permet d'écrire $k_\alpha = k_\beta = k_\gamma = 2$: $\underline{u_\gamma = u_\beta = 7.272\ 10^{-5} \text{ rad}}$.

Le calcul de l'incertitude-type sur α permet ensuite, avec k_α celui de l'incertitude élargie, $\underline{U_\alpha = 206\ \mu\text{rad}}$

5. $\underline{\alpha = 456.8 \pm 0.2 \text{ mrad} = (26.172 \pm 0.012)° = 26°10'19'' \pm 44''}$

6. La distance A-B se calcule ainsi : $\frac{\sin\alpha}{b} = \frac{\sin\gamma}{a}$ ⇒ $a = \frac{b\sin\gamma}{\sin\alpha}$ ⇒ $\underline{a = 12.656 \text{ km}}$

7. La différentielle logarithmique de a est plus simple à établir que sa différentielle totale :

$\text{Ln}(a) = \text{Ln}(b) + \text{Ln}(\sin\gamma) - \text{Ln}(\sin\alpha)$ ⇒ $\frac{da}{a} = \frac{db}{b} + \frac{d(\sin\gamma)}{\sin\gamma} - \frac{d(\sin\alpha)}{\sin\alpha}$

⇒ $\frac{da}{a} = \frac{db}{b} + \frac{\cos\gamma\, d\gamma}{\sin\gamma} - \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sin\alpha}$ ⇒ $\frac{da}{a} = \frac{db}{b} + \frac{d\gamma}{\text{tg}\,\gamma} - \frac{d\alpha}{\text{tg}\,\alpha}$

8. Cela permet d'établir l'incertitude-type relative sur a : $\frac{u_a}{a} = \sqrt{\left(\frac{u_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{u_\gamma}{\text{tg}\,\gamma}\right)^2 + \left(\frac{u_\alpha}{\text{tg}\,\alpha}\right)^2}$

L'incertitude élargie sur a se calcule après (u_b/b), u_γ, u_α et u_a (voir tableau) : $\underline{U_a = 8.578 \text{ m}}$

9. $\underline{a = 12656 \pm 9 \text{ m}}$

---

* Les coefficients d'élargissement k_α, k_β et k_γ permettent de passer à l'incertitude (élargie) : $U = k.u \Leftrightarrow u = U/k$

Soit ici : $U_\alpha/k_\alpha = \sqrt{(U_\beta/k_\beta)^2 - (U_\gamma/k_\gamma)^2}$, et après simplification : $U_\alpha = \sqrt{(U_\beta)^2 - (U_\gamma)^2}$ ⇒ $\underline{U_\alpha = 206\ \mu\text{rad}}$

II. MESURE DU MODULE DE RIGIDITE D'UN METAL (9 pts)

1) La force est homogène au produit d'une raideur par une longueur : $F = k(l-l_0)$ $\Leftrightarrow$ $k = \dfrac{F}{l - l_0}$

Soit donc : $\dfrac{F}{l - l_0} = \dfrac{G_a\, d^4}{8nD^3}$ $\Rightarrow$ $G_a = \dfrac{8nD^3F}{(l - l_0)d^4}$ $\Rightarrow$ $[G_a] = \dfrac{L^3\,[F]}{L\,L^4} = [F]L^{-2}$.

G_a est donc homogène au rapport force/surface, soit homogène à une pression, dont l'unité SI est le pascal (Pa).

Si nous développons la dimension d'une force à partir de la définition du poids d'une masse m soumise à l'accélération de pesanteur, P = mg, nous obtenons : $[F] = [P] = M.L.T^{-2}$. La dimension de G_a est donc :

$[G_a] = ML^{-1}T^{-2}$, qui correspond dans le Système International à l'unité $kg.m^{-1}.s^{-2}$ ou Pa.

2) $G_a = \dfrac{8nkD^3}{d^4}$ $\Rightarrow$ $Ln(G_a) = Ln(8) + Ln(n) + Ln(k) + 3Ln(D) - 4Ln(d)$

$$\Rightarrow \frac{dG_a}{G_a} = \frac{dn}{n} + \frac{dk}{k} + 3\frac{dD}{D} - 4\frac{d\,d}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{Ga}}{G_a} = \sqrt{\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{u_k}{k}\right)^2 + 9\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + 16\left(\frac{u_d}{d}\right)^2}$$

à chaque incertitude-type u_x appliquons son coefficient d'élargissement k_x : $u_x = \dfrac{U_x}{k_x}$

L'équation précédente devient : $$\frac{U_{Ga}}{k_aG_a} = \sqrt{\left(\frac{U_n}{k_n n}\right)^2 + \left(\frac{U_k}{k_k\, k}\right)^2 + 9\left(\frac{U_D}{k_D D}\right)^2 + 16\left(\frac{U_d}{k_d d}\right)^2}$$

Si tous les coefficients d'élargissement sont égaux, ils s'éliminent et l'incertitude relative sur G_a s'écrit :

$$\frac{U_{Ga}}{G_a} = \sqrt{\left(\frac{U_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{U_k}{k}\right)^2 + 9\left(\frac{U_D}{D}\right)^2 + 16\left(\frac{U_d}{d}\right)^2}$$

3) $U_{De} = U_{Di} = \dfrac{1}{50} = 0{,}02$ mm = 20 µm (*Rq : en principe dans ce cas la dispersion est supposée uniforme, soit $U_{De} = u_{De}.\sqrt{3}$*)

$D = \dfrac{D_e + D_i}{2}$ $\Rightarrow$ $dD = \dfrac{1}{2}(dD_e + dD_i)$ $\Rightarrow$ $u_D = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_{De}^2 + u_{Di}^2}$ et $U_D = k_Du_D$

Calculs numériques :

grandeur	unités	variable	valeur	distribution	élargissement	incertitude	inc.-type
diamètre extérieur	mm	De	12.26	normale	*2*	0.02	0.01
diamètre intérieur	mm	Di	10.84	normale	*2*	0.02	0.01
Diamètre	mm	D	11.55	normale	2	0.01414	0.007071

Soit donc : $D = 11{,}55 \pm 0.02$ mm

4) Mesures : $k = 11{,}4 \pm 0{,}1\ N.m^{-1}$; $d = 0{,}59 \pm 0{,}01$ mm ; n = 68 sans incertitude ($U_n = 0$)

Calculs numériques :

grandeur	unités	variable	valeur	distribution	Élargiss.	incertitude	inc.-type	inc.-type relative
raideur	N/m	k	11.4	normale	2	0.1	0.05	$4{,}39.10^{-3}$
epaisseur	mm	d	0.59	normale	2	0.01	0.005	$8{,}47.10^{-3}$
nombre		n	68	normale	2	0	0	0
Diamètre	mm	D	11.55	normale	2	0.01414	0.007071	$0{,}612.10^{-3}$
rigidité	Pa	Ga	$78{,}857.10^9$	normale	2	$5{,}398.10^9$	2699297	$34{,}23.10^{-3}$

Soit donc : $G_a = 78{,}9 \pm 5{,}4$ GPa

5) Les incertitudes-type relatives sont sans dimension et peuvent être comparées directement. La dernière colonne du tableau permet de les classer : $\dfrac{u_d}{d} > \dfrac{u_k}{k} > \dfrac{u_D}{d}$ Comme de plus $\dfrac{u_d}{d}$ est affecté du plus gros coefficient (16) dans l'équation de $\dfrac{u_{Ga}}{G_a}$ l'épaisseur d du fil est le mesurande qui contribue le plus à l'incertitude totale U_{Ga}.