CORRIGE DE L'EXAMEN DE METROLOGIE 2002 1ERE ANNEE

Durée : 2 heures ; une calculatrice électronique autorisée ; tout document et téléphone portable interdits.

I. ETALONNAGE

A. VALIDATION DE LA METHODE SUR UNE VALEUR.

1. Une telle série de mesurages est effectuée dans des conditions de **répétabilité**.

2. Le résultat de la mesure est la moyenne des 10 valeurs obtenues : e = 52.04 µm.

3. La distribution est supposée gaussienne. En prenant l'incertitude U_e à 2 fois l'écart-type $\sigma_e = 217$ nm, on assure qu'environ 95 % des mesures possibles sont dans l'intervalle de confiance : $U_e = 434$ nm.

4. Résultat de la mesure : $e = 52.04 \pm 0.44$ nm ou bien : $e = 52.1 \pm 0.5$ nm

5. Incertitude relative : $U_e/e = 0.834\ \% = 8.34\ 10^{-3}$.

6. L'appareil de mesure présente une erreur systématique d'environ 2 µm, il n'est donc ni exact (écart à l'étalon) ni juste (l'écart est systématique). Par contre, il est fidèle (les valeurs obtenues sont proches les unes des autres).

7. Un tel résultat, une valeur très voisine, une incertitude proche, montre que la méthode est reproductible.

B. DROITE D'ETALONNAGE

8. La droite d'étalonnage est du type y = ax + b, avec x l'étalon et y la meusre.
pente : a = 0.979 ; ordonnée à l'origine : b = 1.45 µm ; coefficent de corrélation : c = 0.9998.

II. LE FLEAU : UN MOYEN DE CONTROLE DE CAPTEURS DE COUPLE

1. Dimension d'un couple : $c = mgx \Rightarrow [c] = M\,L^2\,T^{-2}$

2. Unité de couple : kg m^2 s^{-2}. Unité usuelle : N m.

3. a est sans dimension

4. $c = mgx - 2a(m_b+m)gr = g(-2am_br + m(x-2ar)) = mgx - 2amgr - 2am_bgr$

$$dc = \frac{\partial c}{\partial m}dm + \frac{\partial c}{\partial g}dg + \frac{\partial c}{\partial x}dx + \frac{\partial c}{\partial a}da + \frac{\partial c}{\partial r}dr + \frac{\partial}{\partial m_b}dm_b$$

ce qui peut être simplifié ainsi : $dc = c'_m\,dm + c'_g\,dg + c'_x\,dx + c'_a\,da + c'_r\,dr + c'_{mb}\,dm_b$

soit donc :

$$\boxed{dc = g(x-2ar)\,dm + (mx-2a(m+m_b)r)\,dg + mg\,dx + 2(m+m_b)gr\,da + 2a(m+m_b)g\,dr + 2agr\,dm_b}$$

5. Rappel des composantes de c et de leurs incertitudes absolues :

Grandeur	m (kg)	g (ms^{-2})	x (m)	a ()	r (m)	m_b (kg)
Valeur	2.000	9.809	0.3020	0.001	$8.50\ 10^{-3}$	1.150
Incertitude	0.004	0.001	0.0002	10^{-6}	$0.01\ 10^{-3}$	0.001

6. Les dérivées partielles de c sont les suivantes :

$c'_m = g(x-2ar) = 2.962\ m^2s^{-2}$	$c'_g = mx-2a(m+m_b)r = 0.6039$ kg m	$c'_x = mg = 19.62$ N
$c'_a = 2(m+m_b)gr = 0.5253$ N m	$c'_r = 2a(m+m_b)g = 0.06180$ N	$c'_{mb} = 2agr = 166.8\ 10^{-6}\ m^2s^{-2}$

7. Avec l'hypothèse que les distributions de toutes les variables sont normale, nous adoptons un coefficient d'élargissement unique pour toutes les variables : $k_c = k_m = k_g = k_x = k_a = k_r = k_{mb} = k = 2$. Ce coefficient

s'élimine donc lors du passage des incertitudes-type aux incertitudes et l'expression de dc nous permet d'écrire directement celle de U_c :

$$U_c = \sqrt{c'^2_m U_m^2 + c'^2_g U_g^2 + c'^2_x U_x^2 + c'^2_a U_a^2 + c'^2_r U_r^2 + c'^2_{mb} U_{mb}^2}$$

$$U_c = \sqrt{(g(x-2ar))^2 U_m^2 + (mx-2a(m+m_b)r)^2 U_g^2 + (mg)^2 U_x^2 + (2(m+m_b)gr)^2 U_a^2 + (2a(m+m_b)g)^2 U_r^2 + (2agr)^2 U_{mb}^2}$$

8. $c = mgx - 2a(m_b+m)gr$ soit : $\underline{c = 5.924 \text{ Nm}}$ et $\underline{U_c = 12.5\ 10^{-3} \text{ Nm}}$

$$\boxed{\text{soit : } c = (5924 \pm 13)10^{-3} \text{ Nm}}$$

9. L'incertitude relative sur c est : $\underline{\dfrac{U_c}{c} = 2.11\ 10^{-3} = 0.211\ \%}$.

III. MESURE DU TEMPS DE DEMI-VIE D'UN RADIOELEMENT

1. **<u>Calcul de l'incertitude relative</u>** $\dfrac{\mathbf{U(R)}}{\mathbf{R}}$

Calcul de la différentielle logarithmique.

$$R = \frac{N_1 - N_0}{N_2 - N_0} \Rightarrow \ln R = \ln(N_1 - N_0) - \ln(N_2 - N_0)$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{d(N_1 - N_0)}{N_1 - N_0} - \frac{d(N_2 - N_0)}{N_2 - N_0} = \left(\frac{1}{N_2 - N_0} - \frac{1}{N_1 - N_0}\right) dN_0 + \frac{dN_1}{N_1 - N_0} - \frac{dN_2}{N_2 - N_0}$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{N_1 - N_2}{(N_1 - N_0)(N_2 - N_0)} \cdot dN_0 + \frac{dN_1}{N_1 - N_0} - \frac{dN_2}{N_2 - N_0}$$

$$\text{d'où } \frac{U(R)}{R} = \left\{\left[\frac{N_1 - N_2}{(N_1 - N_0)(N_2 - N_0)}\right]^2 \cdot U^2(N_0) + \frac{U^2(N_1)}{(N_1 - N_0)^2} + \frac{U^2(N_2)}{(N_2 - N_0)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Calcul numérique :

$$\frac{U(R)}{R} = \left\{A^2 + B^2 + C^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$A = \frac{N_1 - N_2}{(N_1 - N_0)(N_2 - N_0)} \cdot U(N_0) = \frac{1683 - 914}{(1683 - 500)(914 - 500)} \cdot 45 = 0{,}070657 \Rightarrow A^2 = 0{,}00499$$

$$B = \frac{U(N_1)}{(N_1 - N_0)} = \frac{82}{(1683 - 500)} = 0{,}06932 \qquad \Rightarrow B^2 = 0{,}004805$$

$$C = \frac{U(N_2)}{(N_2 - N_0)} = \frac{61}{(914 - 500)} = 0{,}14734 \qquad \Rightarrow C^2 = 0{,}021710$$

$$\text{d'où } \frac{U(R)}{R} = \left\{A^2 + B^2 + C^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}031507} = 0{,}178$$

2. Calcul de l'incertitude relative $\frac{U(T)}{T}$

Calcul de la différentielle logarithmique.

$$T = \frac{t\ln 2}{\ln\left(\frac{N_1 - N_0}{N_2 - N_0}\right)} \quad \Rightarrow \quad \ln T = \ln(t\ln 2) - \ln(\ln R) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} = -\frac{d(\ln R)}{\ln R} = -\frac{1}{\ln R}\cdot\frac{dR}{R}$$

d'où $\frac{U(T)}{T} = \frac{1}{\ln R}\cdot\frac{U(R)}{R}$

Calcul numérique.

$$\frac{U(T)}{T} = \frac{1}{\ln\left(\frac{1683-500}{914-500}\right)}\cdot 0{,}178 = 0{,}1695$$

3. Résultat de la mesure de T.

$$T = \frac{24 * \ln 2}{\ln\left(\frac{1683-500}{914-500}\right)} = 15{,}844\,\text{heures} \quad \text{et}\; U(T) = 0{,}1695 * 15{,}844 = 2{,}686\,\text{heures}$$

Résultat : **T = (15,9 ± 2,7) heures**
