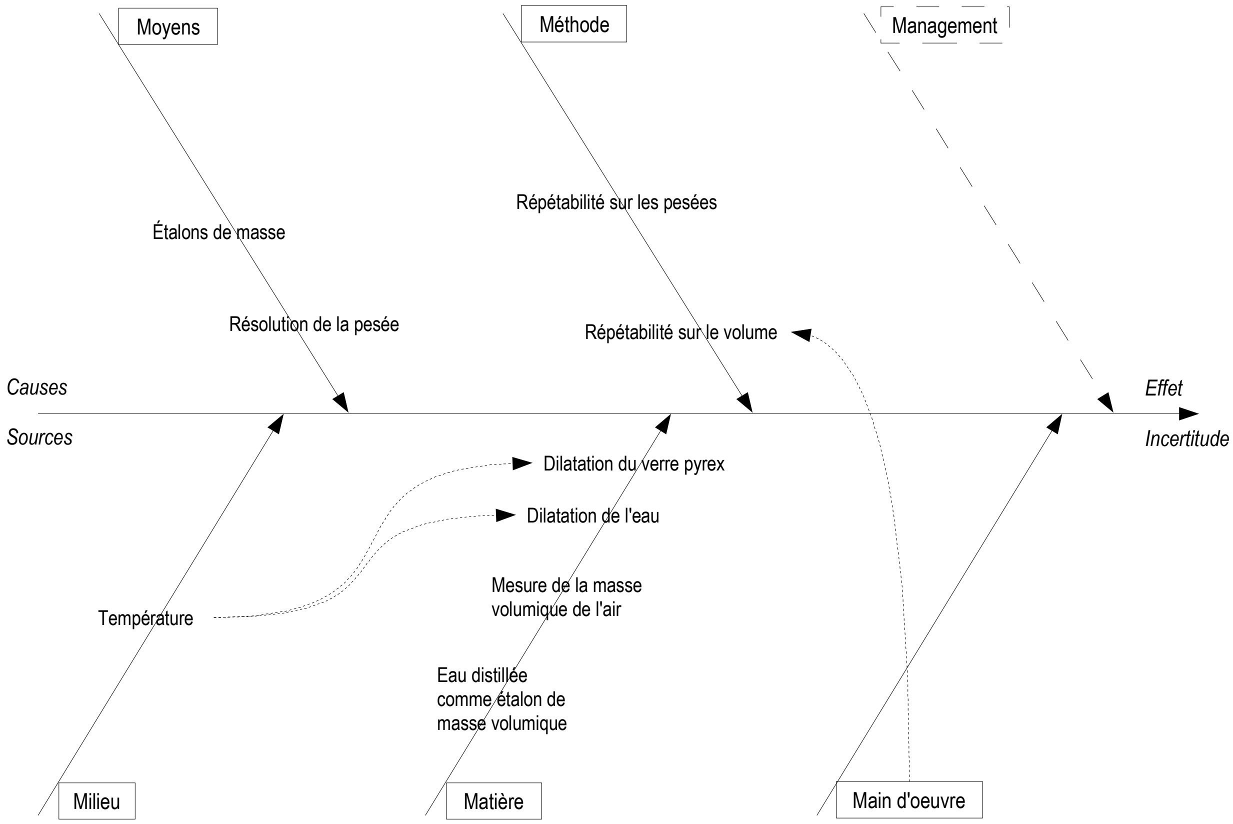
Durée : 1 heure 30 ; une calculatrice électronique, autonome, <A5, munie de fonctions statistiques est indispensable ; téléphones portables interdits ; tous documents interdits à l'exception des supports de cours et notes de cours manuscrites.

Étalonnage d'une fiole jaugée

Solutions

1. Le diagramme causes-effet (dit d'Ishikawa ou encore des "5 ou 6 M") suivant permet de visualiser et de trier les sources de l'incertitude finale sur la mesure du volume de la fiole.



Un tel diagramme est toujours discutable. Par exemple la répétabilité de la méthode globale permet-elle de prendre en compte l'effet de la main d'oeuvre (ajustement du niveau au trait,...) ? Ce diagramme doit être contrôlé à la fin du bilan.

2. Nous avons : p_2 = 81,217 g ; p_1 = 181,116 g ; e = 1 g/cm^3 ; a = 1,2040 mg/cm^3 donc $V = \dfrac{p_2 - p_1}{e - a}$ = 100,0194 cm^3

3. Le calcul des dérivées partielles de V peut se faire par la différentielle logarithmique :

$$\frac{dV}{V} = \frac{d(p_2 - p_1)}{p_2 - p_1} - \frac{d(e-a)}{e-a} \quad \text{soit} \quad \frac{dV}{V} = \frac{dp_2}{p_2 - p_1} - \frac{dp_1}{p_2 - p_1} - \frac{de}{e-a} + \frac{da}{e-a}$$ d'où il vient par identification :

$$\frac{\partial V}{\partial p_2} = V'_{p_2} = \frac{V}{p_2 - p_1} = \frac{1}{e-a} = 1{,}0012 \text{ cm}^3/\text{g} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial p_1} = V'_{p_1} = \frac{-V}{p_2 - p_1} = \frac{-1}{e-a} = -1{,}0012 \text{ cm}^3/\text{g}$$

$$\frac{\partial V}{\partial e} = V'_e = \frac{-V}{e-a} = \frac{-(p_2 - p_1)}{(e-a)^2} = -100{,}140 \text{ cm}^6/\text{g} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial a} = V'_a = \frac{V}{e-a} = \frac{p_2 - p_1}{(e-a)^2} = 100{,}140 \text{ cm}^6/\text{g}$$

4.

Tableau de travail complété listant toutes les sources d'incertitudes recensées par l'énoncé.

	Variable	Valeur	source d'inc.	type	Ux	Kx	.ux	V'x	uVx : A ; BR	uVx : BL
pesée vide	p_1	81,217	étalons	BR	1,543E-4	2	7,716E-5		-7,7249E-5	(cm³)
(g)			répétabilité	A	1,200E-3	1	1,200E-3	-1,00121	-1,2014E-3	
			résolution	BL	5,000E-4	1,73	2,887E-4	(cm³/g)		2,8902E-4
pesée pleine	p_2	181,116	étalons	BR	3,441E-4	2	1,721E-4		1,7227E-4	
(g)			répétabilité	A	1,200E-3	1	1,200E-3	1,00121	1,2014E-3	
			résolution	BL	5,000E-4	1,73	2,887E-4			2,8902E-4
M. vol. eau	e	1	étalon officiel	BR	1,000E-5	2	5,000E-6	-100,14	-5,0070E-4	
(g/cm³)			dilatation e	BL	-1,000E-5	2,45	-4,082E-6	(cm⁶/g)		4,0882E-4
M. vol. air	a	1,2040E-3	bilan	BR	4,400E-3	2	2,200E-3	100,14	2,2031E-1	
			dilatation V	BL	5,001E-5	2,45	2,042E-5	1		2,0416E-5
(cm³)			répétabilité V	A	3,000E-3	1	3,0000E-3	1	3,0000E-3	
Volume	V	**100,0194**	bilan		**0,4407**	2	2,2034E-1		(cm³)	1,0073E-3

Commentaires du tableau :

L'incertitude sur les masses étalon intervient à chaque pesée par comparaison comme $1{,}9.10^{-6}$ x pesée. Elle est de type BR. l'étalonnage des masses est supposé produit par un bilan donc, sans autre indication[1], le coefficient d'élargissement correspondant est pris égal à 2.

La résolution de chaque pesée est prise comme intervalle de confiance de l'incertitude correspondante. Celle-ci est donc de 0,5 mg. La distribution des incertitudes liées à l'affichage est supposée uniforme, soit un coefficient d'élargissement de $\sqrt{3}$. Une telle évaluation d'incertitude ne relève ni d'une répétabilité ni d'un raccordement, elle est de type BL.

Chaque pesée fait l'objet d'un essai de répétabilité dont l'écart-type, 1,2 mg, sert d'incertitude (et d'incertitude-type), donc avec un coefficient d'élargissement de 1. Répétabilité donc type A.

L'eau (bi-)distillée sert d'étalon de masse volumique officiel avec une incertitude relative de 10^{-5} qui vient se multiplier à la valeur de e = 1 g/cm³. Étalon, donc élargissement à 2 et type BR.

Pour raccourcir l'énoncé, la mesure de la masse volumique de l'air a été supposée effectuée. L'incertitude fournie est celle d'un bilan, nous la supposons donc de type BR avec un élargissement à 2.

La température est connue à ± 0,05 K (ce qui est très bien pour la thermalisation d'une salle) avec une distribution en arcsinus (régulation thermique) soit un élargissement de $\sqrt{6}$. Cette incertitude intervient d'une part dans la dilatation de l'eau à raison de $-2{,}10^{-4}$ x (masse volumique) x $0{,}05/\sqrt{6}$ et d'autre part dans la dilatation du verre pyrex comme 10^{-5} x volume x $0{,}05/\sqrt{6}$. Ces deux incertitudes viennent d'une grandeur d'influence locale et ne peuvent être raccordées, donc type BL.

5. Finalement : V = 100,02 ± 0,44 cm³.

Incertitude relative : U_V/V = ,441 %

Annexe : équations de la dilatation thermique appliquée à une masse volumique :

Dilatation thermique d'un volume : $V_2 = V_1\left(1+\alpha\left(\theta_2-\theta_1\right)\right)$ ou $V_2 - V_1 = V_1\,\alpha\left(\theta_2-\theta_1\right)$

à la limite $\theta_2 \rightarrow \theta_1$ on a donc : $dV = V\,\alpha\,d\theta$ (1)

Appliqué à la masse volumique $e = \dfrac{m}{V}$ soit $de = -m\dfrac{dV}{V^2}$ d'où, en remplaçant dV par (1) : $de = -e\,\alpha\,d\theta$

1 Le théorème central limite assure que la distribution résultant de la combinaison (étalonnage, bilan,...) de plusieurs distributions de types variés est normale (gaussienne). En l'absence d'indication le coefficient d'élargissement d'une distribution normale est pris égal à 2.