OUTILS MATHÉMATIQUES DU MÉTROLOGISTE

1. DERIVEE PARTIELLE. Dérivée simple d'une fonction de plusieurs variables f(x,y,z) par rapport à une seule de ses variable, toutes les autres étant supposées constantes (x = cte ⇔ dx = 0) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dy}\left(f(x,y,z)\right)_{x=cte;z=cte}$$

2. DIFFERENTIELLE TOTALE. La différentielle (totale) de f(x,y,z) est une combinaison linéaire des dérivées partielles de f par rapport à chaque variable Elle permet de déterminer l'incertitude résultant de la composition de plusieurs mesures et de leurs incertitudes (à utiliser quand f n'est pas un produit ou une fraction) :

$$f(x,y,z) \quad \rightarrow \quad df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$$

3. COMPOSITION DES VARIANCES de variables indépendantes (corrélations : $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$).

$$\sigma^2{}_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma^2{}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma^2{}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma^2{}_z \quad \Leftrightarrow \quad n_f = \left(\frac{¶f}{¶x}\right)^2 n_x + \left(\frac{¶f}{¶y}\right)^2 n_y + \left(\frac{¶f}{¶z}\right)^2 n_z$$

*L'**écart-type** s_x n'est valable que pour des distributions gaussiennes, sinon utiliser l'**incertitude-type** u_x.*

4. PROPAGATION QUADRATIQUE DES INCERTITUDES. $U_f = k\,\sigma_f$, donc :

$$\frac{U_f{}^2}{k_f{}^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{U_x{}^2}{k_x{}^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{U_y{}^2}{k_y{}^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{U_z{}^2}{k_z{}^2}$$

avec l'hypothèse gaussienne $k_f = k_x = k_y = k_z = k = 2$:

$$U_f{}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 U_x{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 U_y{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 U_z{}^2$$

*Le calcul via la différentielle totale débouche sur l'**incertitude absolue** U_f, qui a la même dimension que f.*

---

5. DIFFERENTIELLE LOGARITHMIQUE. (à utiliser quand f(x,y,z) est un produit) :

$$\text{par exemple : } f(x,y,z) = \frac{x^n \,.\, y^m}{z^p} \;\Rightarrow\; Ln(f) = n\,Ln(x) + m\,Ln(y) - p\,Ln(z) \;\Rightarrow\; \frac{df}{f} = n\frac{dx}{x} + m\frac{dy}{y} - p\frac{dz}{z}$$

le passage aux incertitudes type, aux variances, puis aux incertitudes s'effectue de la même manière que pour la différentielle totale. Avec l'hypothèse gaussienne, il vient :

$$\left(\frac{U_f}{f}\right)^2 = n^2\left(\frac{U_x}{x}\right)^2 + m^2\left(\frac{U_y}{y}\right)^2 + p^2\left(\frac{U_z}{z}\right)^2$$

*Le calcul via la différentielle logarithmique débouche sur l'**incertitude relative** $\frac{U_f}{f}$, qui est sans dimension (l'incertitude relative est sans unité ou en % et doit être présentée séparément de f, qui a une dimension).*