XIII. ANALYSE DES FONCTIONS DE TRANSFERT EN REGIME HARMONIQUE LE DIAGRAMMME DE BODE

A. ANALYSE D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

Forme canonique ; Exemple ;

Limites ; Fréquence de Coupure ; Bande Passante ; Transition

B. LE DIAGRAMME DE BODE

Les échelles logarithmiques

Les filtres du premier ordre

Les opérateurs idéaux de base

A. ANALYSE D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

1. Rappel : Forme canonique d'une fonction de transfert

Une fonction de transfert est une fraction de 2 polynômes :

$$\mathbf{T(x) = A\,\frac{N(x)}{D(x)} = A\,\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}}$$

m, l'odre du dénominateur D(x) est **l'ordre du filtre** correspondant

A est **l'atténuation** (A < 1) ou **l'amplification** (A > 1) du filtre.

Si $b_0 \neq 0$, alors **b_0 est impérativement imposé égal à 1**. De même pour a_0.

T(X) PEUT SERVIR DANS DEUX TYPES D'ANALYSE :

1. x = p : Transformée de Laplace

$\Rightarrow$ analyse du régime transitoire,

réponse incrémentielle (▁┌▔) ou

réponse impulsionnelle (▁|▁).

2. x = jω : Transformée de Fourier

$\Rightarrow$ analyse du régime harmonique (~).

Fonction de transfert en régime permanent de signaux sinusoïdaux

$$\underline{T}(j\omega) = \mathrm{Re}(\underline{T}(j\omega)) + j\,\mathrm{Im}(\underline{T}(j\omega))$$

$\underline{T}(j\omega)$ nous renseigne sur deux propriétés du système en régime sinusoïdal :

1. L'**atténuation (amplification)** ou rapport des amplitudes entre l'entrée et la sortie en fonction de la fréquence :

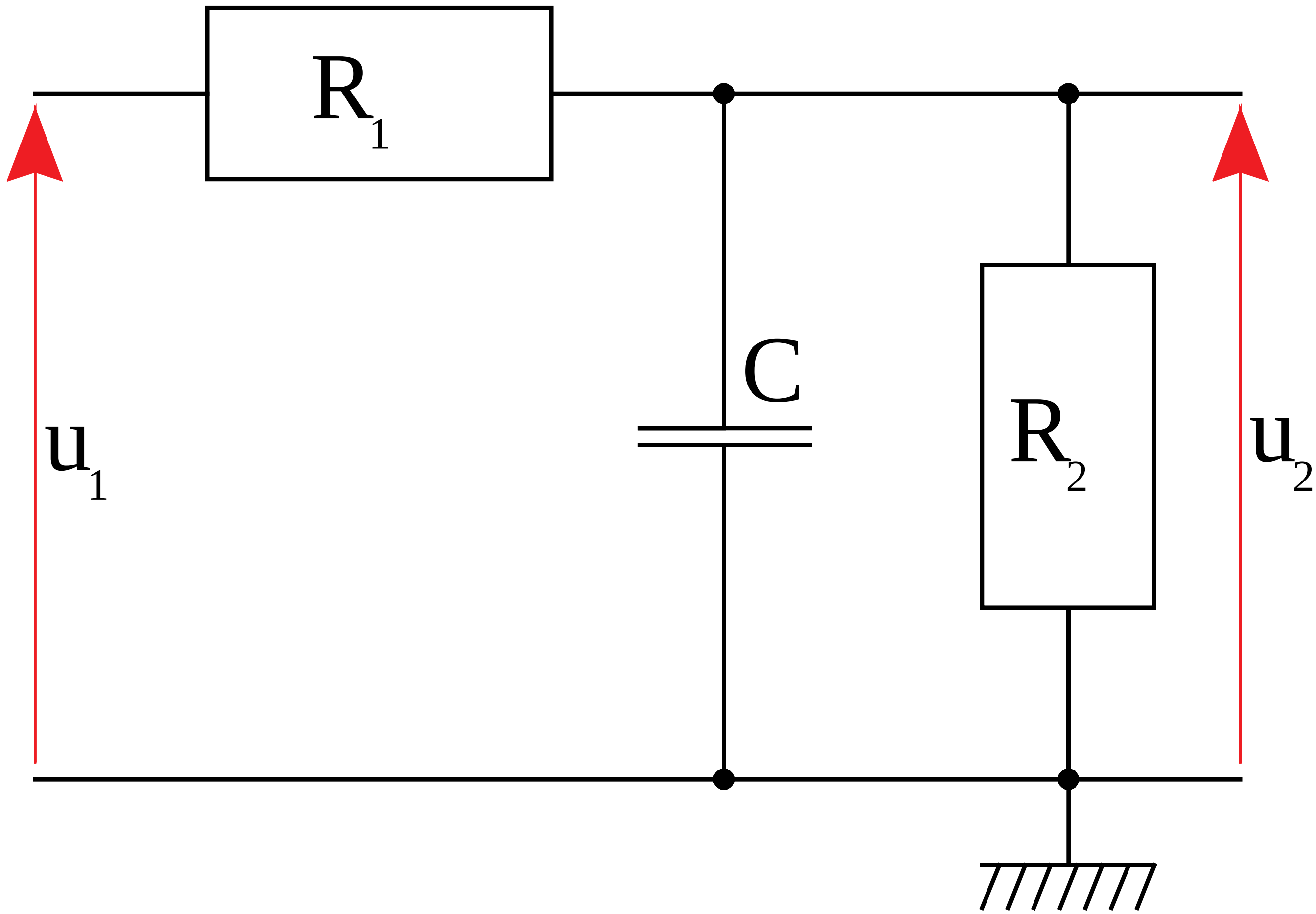
$$\boldsymbol{|\underline{T}(j\omega)| = \frac{U_{2p}(\omega)}{U_{1p}(\omega)}} = \frac{U_{2pp}(\omega)}{U_{1pp}(\omega)} = \frac{U_{2rms}(\omega)}{U_{1rms}(\omega)}$$

2. Le **déphasage** φ entre $u_2(t)$ et $u_1(t)$:

$$\boldsymbol{\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{T}(j\omega))} = \mathrm{Arg}(N(j\omega)) - \mathrm{Arg}(D(j\omega))$$

$$\Rightarrow \varphi = \mathrm{ArcTan}\left(\frac{\mathrm{Im}(\underline{N}(j\omega))}{\mathrm{Re}(\underline{N}(j\omega))}\right) - \mathrm{ArcTan}\left(\frac{\mathrm{Im}(\underline{D}(j\omega))}{\mathrm{Re}(\underline{D}(j\omega))}\right)$$

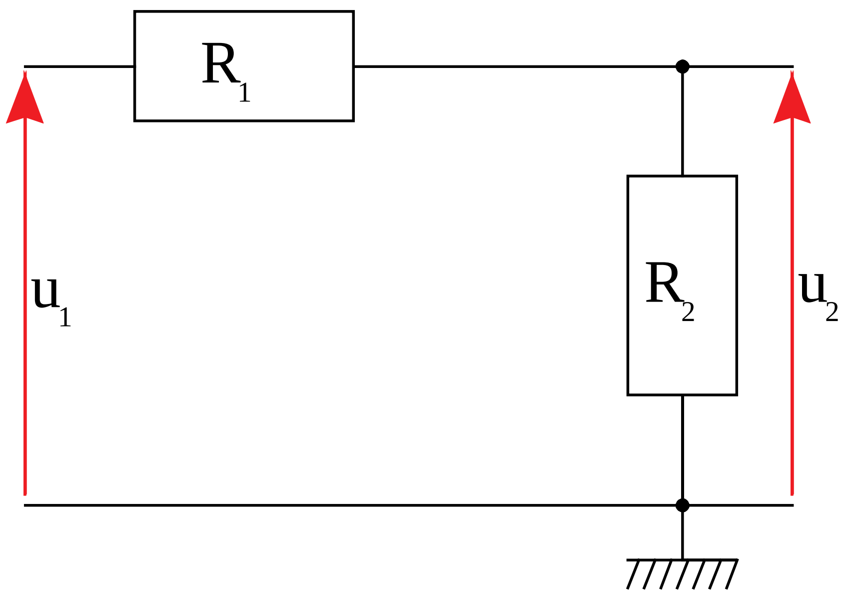
Exemple d'un filtre passif.



Observations avant calcul

BF (Basses Fréquences) :

Le condensateur C se comporte comme un circuit ouvert.



Le filtre est équivalent à un pont diviseur R_1, R_2, soit donc,

$$u2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_1(t)$$

$$\Rightarrow$$

le signal passe et $\frac{u_2}{u_1} < 1$

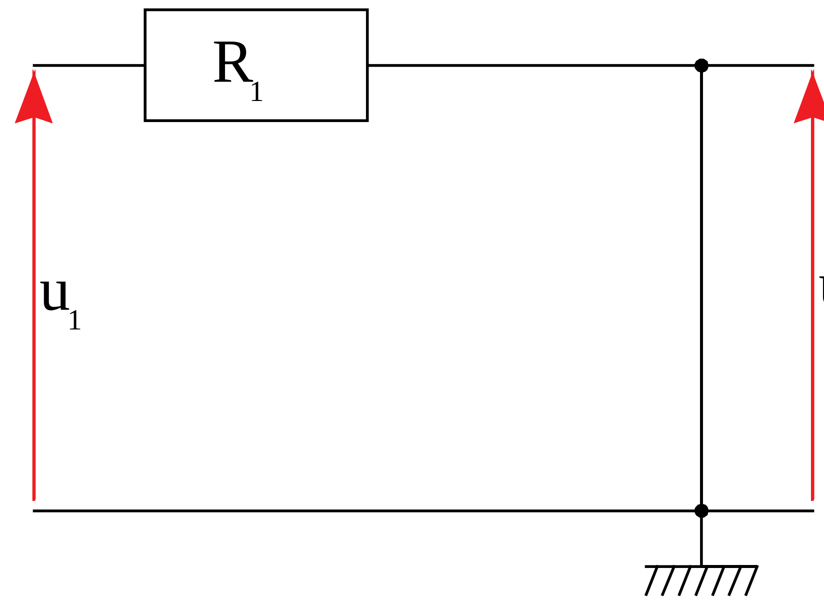
HF (Hautes Fréquences) :

C est équivalent à un court-circuit :

$u_2(t) = 0$

$\Rightarrow$

Le signal ne passe pas.



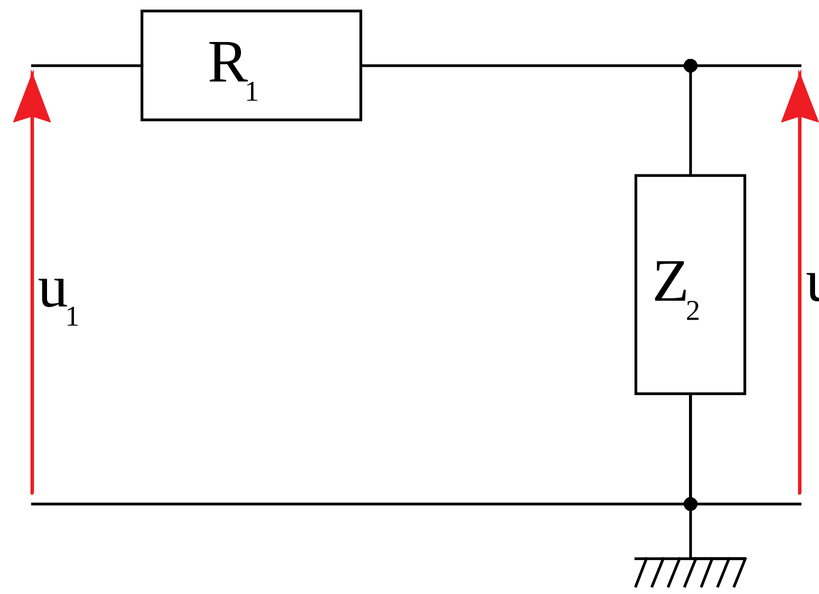
Sans calcul, nous pouvons dire que ce filtre est un passe-bas atténuateur.

Remarque : un seul composant à impédance complexe $\Rightarrow$ premier ordre

CALCUL D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

Ce filtre est équivalent au schéma suivant :

avec : $Z_2 = \dfrac{R_2}{1 + j\omega C R_2}$



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{u}_2(j\omega)}{\underline{u}_1(j\omega)} = \frac{Z_2}{R_1 + Z_2} = \ldots$$

$$\mathbf{\underline{T}(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\frac{1}{1 + j\omega C\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}}$$

INDENTIFICATION A UNE FORME CANONIQUE

$\underline{T}(j\omega)$ doit être identifiée terme à terme à la **forme canonique** de la fonction de transfert d'un **filtre passe-bas du premier ordre** :

$$\underline{\mathbf{T}}(j\omega) = A \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$$

Avec : $A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$: **atténuation** dans la bande passante

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R_1 + R_2}{2\pi\, C\, R_1\, R_2}$: **fréquence propre** ou ici **fréquence de coupure**.

La pulsation propre est l'inverse de la constante de temps : $\omega_0 = 1/\tau$

RECHERCHE DES LIMITES DE $\underline{T}(j\omega)$

(Nous continuons avec l'exemple précédent)

BF : $\underline{T}(j\omega)$ est une constante réelle dans la BP (bande passante).

$$\lim_{\omega \to 0} \underline{T}(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = A \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 0 \text{ (pas de déphasage)}$$

HF : $\underline{T}(j\omega)$ est un imaginaire pur négatif décroissant en $1/\omega$.

$$\lim_{\omega \to \infty} \underline{T}(j\omega) = \frac{1}{R_1 C} \frac{1}{j\omega} = -j0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Remarque 1 : $\omega' = 10\,\omega \quad \Rightarrow \quad |\underline{T}(j\omega')| = |\underline{T}(j\omega)|/10$

Remarque 2 : $1/j\omega$ est l'opérateur intégration en régime harmonique.

FREQUENCE DE COUPURE

$\omega_c = 2\pi f_c$ est la **limite de la bande passante**.

Pour les filtres du premier ordre :

$\omega_c = \omega_0$, pulsation propre ($f_c = f_0$, fréquence propre).

La fréquence de coupure f_c sépare BF et HF.

A f_c, $P_2(\omega_c)$ la puissance de sortie est divisée par 2 :

$$P_2(\omega_c) = P_2(BP)/2, \quad \text{soit donc :} \quad U_2(\omega_c) = U_2(BP)/\sqrt{2}.$$

U_1 étant supposé constant, indépendant de ω :

La **pulsation de coupure** ω_c est telle que : $|\underline{T}(j\omega_c)| = \dfrac{|\underline{T}(BP)|}{\sqrt{2}}$

Pratiquement : $\mathbf{G(\omega_c) = 20 \log|\underline{T}(j\omega_c)| = G(BP) - 3}$ (en dB)

BANDE PASSANTE

C'est le domaine des fréquences

comprises entre les fréquences de coupures

BP = $\Delta f = f_{cHF} - f_{cBF}$ (filtre passe-bande),

ou entre 0 Hz et f_c (passe-bas),

ou entre f_c et ∞ (passe haut).

FREQUENCE DE TRANSITION

C'est la fréquence du gain unité,

à laquelle $|\underline{T}(j\omega_T)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad G(\omega_T) = 0$ dB.

Remarque : Notre exemple de filtre n'a pas de fréquence de transition.

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

Le diagramme de Nyquist, Im(Re)

est la représentation paramétrique de $\mathrm{Im}(\underline{T}(j\omega))$ en fonction de $\mathrm{Re}(\underline{T}(j\omega))$. La pulsation ω (ou la fréquence f) y joue le rôle du paramètre (variable dont tout dépend, mais qui n'est pas représentée).

Le diagramme de Bode est la double représentation

de $\mathbf{G(f) = 20 \log|\underline{T}(j\omega)|}$

et de $\boldsymbol{\varphi(f) = \mathrm{Arg}(\underline{T}(j\omega))}$

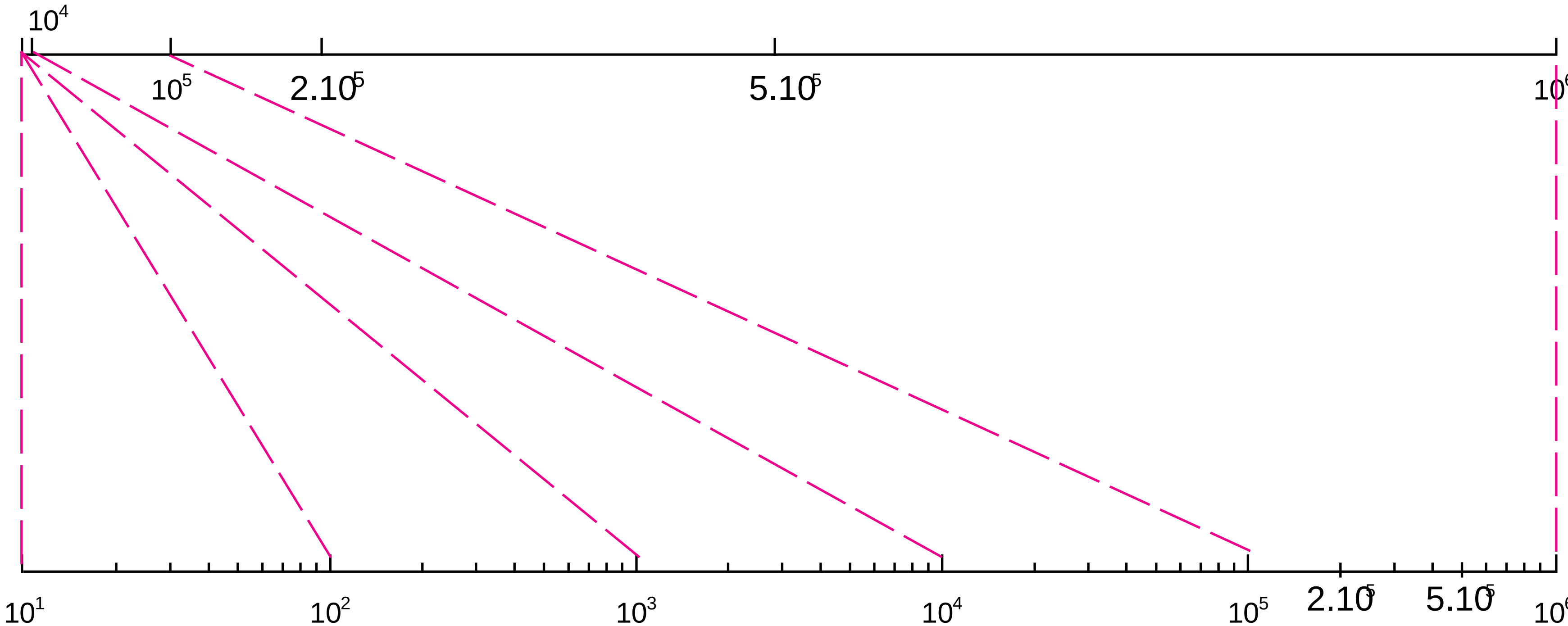
en dB et en degrés, respectivement.

Une échelle logarithmique est prise pour f.

Les échelles logarithmiques

(Abscisses du diagramme de Bode)

Elles servent à représenter des valeurs très différentes sur un même graphe.



Comparaison d'une échelle linéaire et d'une échelle logarithmique

PROPRIETES DES ECHELLES LOGARITHMIQUES

1. log(a.b) = log(a) + log(b) : sur une échelle log, **un produit apparaît comme une somme** simple (graphiquement, c'est une translation).

$$\times 10 \Leftrightarrow +1 \text{ module (ou décade)}$$

2. /!\ **Une échelle log ne comporte pas de zéro**, les graduations principales correspondent à des puissance de 10 (log-décimal).
3. Pour placer une valeur sur une échelle log, toujours la mettre sous la forme $5,2.10^3$: Un chiffre significatif non nul et un seul avant la virgule.
4. Si deux valeurs sont séparées par plus d'un module, la plus petite est pratiquement négligeable.

PROPRIETES DES ECHELLES EN DECIBEL

(Ordonnée de la courbe de gain du diagramme de Bode)

Le graphe dB-log(f) est un graphe log-log

Cela a un effet remarquable sur l'allure les courbes :

Soient X = log(x) l'abscisse et Y = log(y) l'ordonnée.

Une parabole $y = x^n$ devient une droite de pente n : Y = nX

Une droite y = ax reste une droite : Y = log(a)+X

Une hyperbole $y = \frac{1}{x}$ devient une droite de pente -1 : Y = -X

Une pente 1 (⇔y=x) correspond à 20 dB/décade (= 6 dB/octave)

Une pente -1 (⇔y=1/x) correspond à -20 dB/décade (= -6 dB/octave)

Une pente -2 (⇔$1/x^2$) correspond à -40 dB/décade (= -12 dB/octave)

...

Remarque : Une octave correspond à ×2 ou 6 dB.

Points remarquables du diagramme de Bode

Quelques valeurs de la courbe de gain d'un fltre passe-bas du 1er ordre :

$x=\omega/\omega_0$	1/10	1/5	1/2	1	2	5	10
G (dB)	0	-0.458	-1	-3	-4.77	-7	-20

Fonction $20 \log\left(1/\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}\right)$

Quelques valeurs de la fonction ArcTangente entre 0 et ∞ :

$x=\omega/\omega_0$	0	**1/10**	1/5	1/3	**1/2**	$1/\sqrt{2}$	**1**
atg(x) (°)	0	**5.7**	11.3	18.4	**26.5**	35.3	**45**
$x=\omega/\omega_0$	∞	**10**	5	3	**2**	$\sqrt{2}$	
atg(x) (°)	90	**84.3**	78.7	71.6	**63.4**	54.7	

Formes cananiques des fonctions de transfert

Lors de l'étude d'une fonction de transfert $\underline{T}(j\omega)$, il est possible de retrouver rapidement ses paramètres, A et ω_0, en identifiant $\underline{T}(j\omega)$ terme à terme à la forme canonique correspondante.

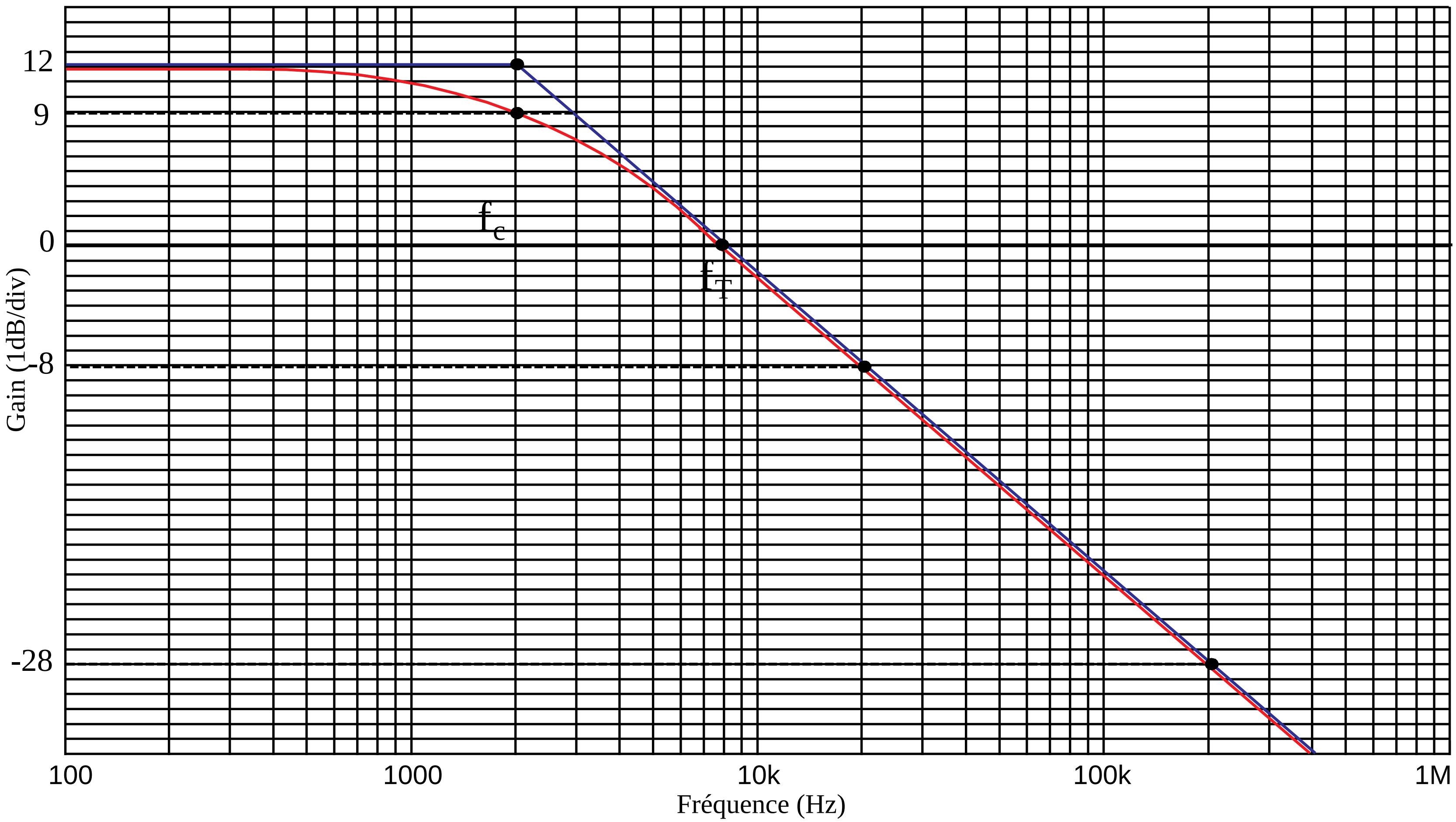
Forme canonique d'un Filtre Passe-bas du premier ordre :

Forme canonique : $$\underline{T}(j\omega) = A \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$$

A : Amplification ou atténuation dans la bande passante

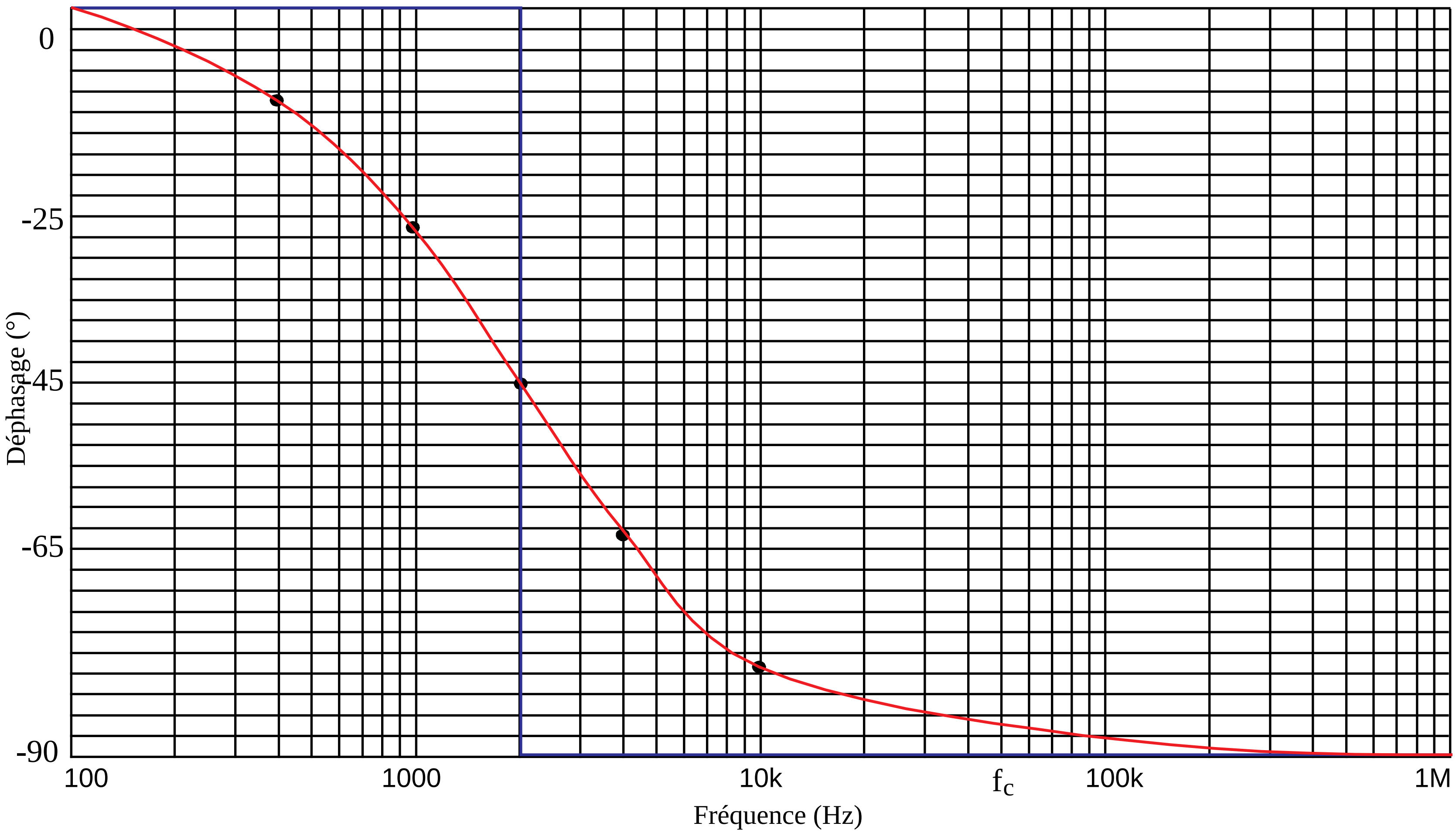
$\omega_0 = \omega_c$: pulsation de coupure

Courbe de Gain d'un Filtre passe-bas du premier ordre.



Exemple choisi : A = 4 ⇔ G(BP) = 12 dB ; f_c = 2 kHz ; f_T = 8 kHz

Courbe de déphasage d'un Filtre passe-bas du premier ordre.



L'allure de φ-log(f) en est déformée par l'échelle log des fréquences

Formes canoniques des fonctions de transfert

Une fois établie la fonction de transfert $\underline{T}(j\omega)$ d'un filtre, l'identification terme à terme de $\underline{T}(j\omega)$ à la forme canonique correspondante permet de retrouver rapidement ses paramètres, A et ω_0,

---

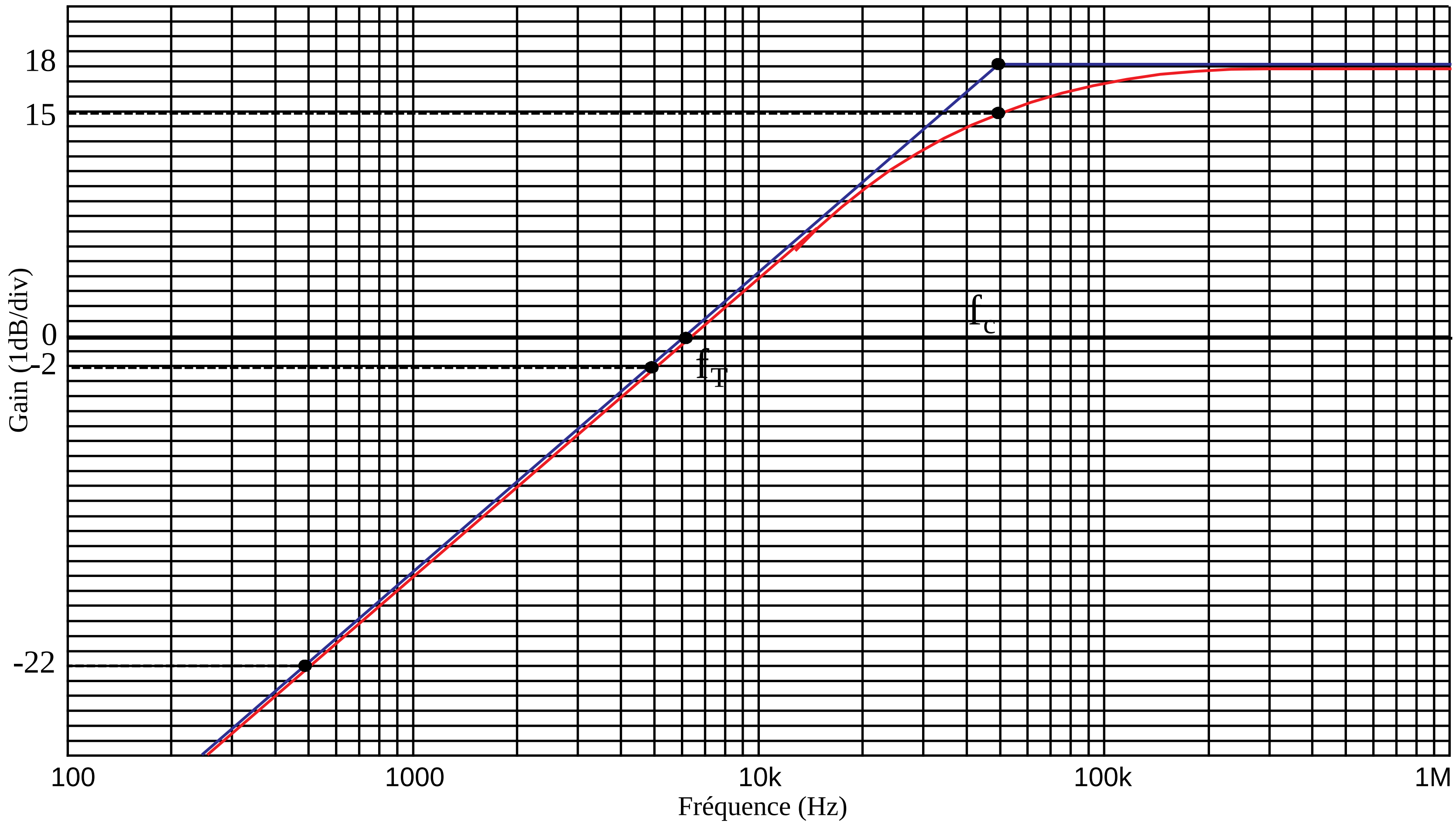
Forme canonique d'un Filtre Passe-haut du premier ordre :

Forme canonique : $$\underline{T}(j\omega) = A \frac{\dfrac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \dfrac{j\omega}{\omega_0}}$$

A : Amplification ou atténuation dans la bande passante

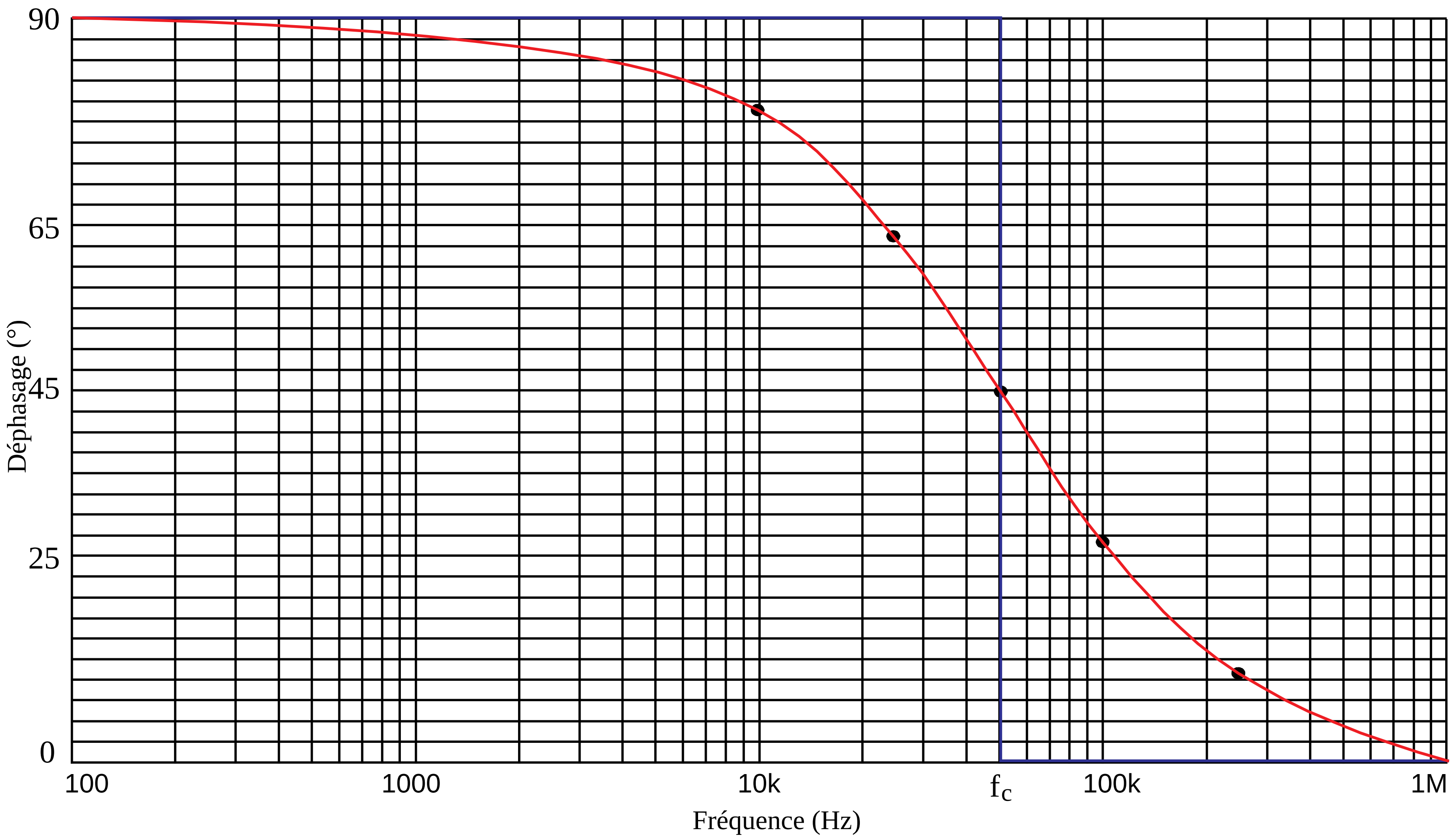
$\omega_0 = \omega_c$: pulsation de coupure

Courbe de Gain d'un Filtre passe-haut du premier ordre.



Exemple choisi : A = 8 ⇔ G(BP) = 18 dB ; f_c = 50 kHz ; f_T = 6 kHz

Courbe de déphasage d'un Filtre passe-bas du premier ordre.



DIAGRAMMES DE BODE DES OPERATEURS DE BASE

La constante

$$\underline{T}(j\omega) = A \qquad \text{Réel}$$

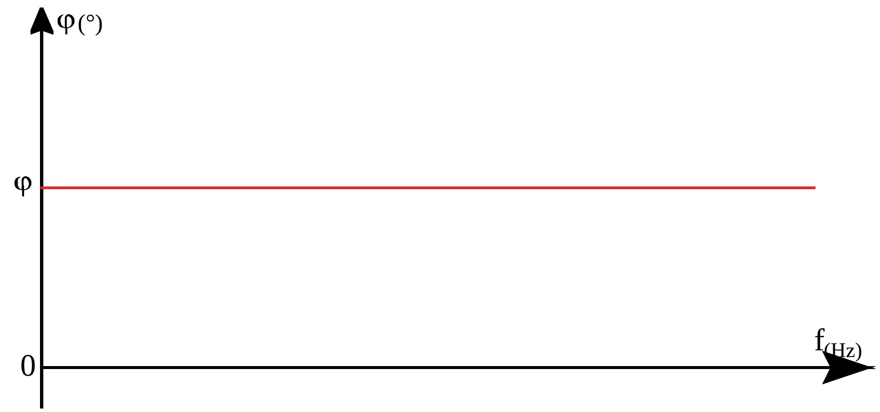
$$G(\omega) = 20\log|A| \qquad\qquad \varphi = 0$$

Le déphaseur idéal

$\underline{T}(j\omega) = e^{j\varphi}$ Complexe de norme unité

$G(\omega) = 0$ dB

φ ajusté



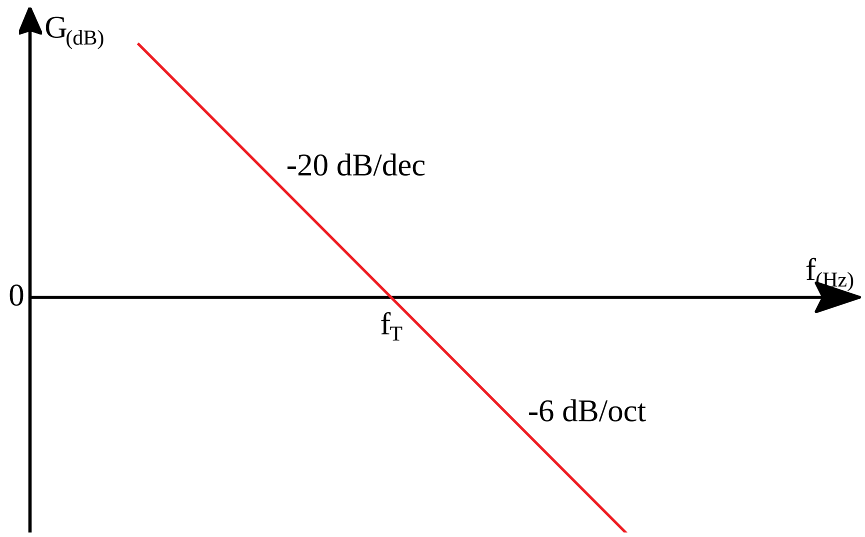
L'intégrateur

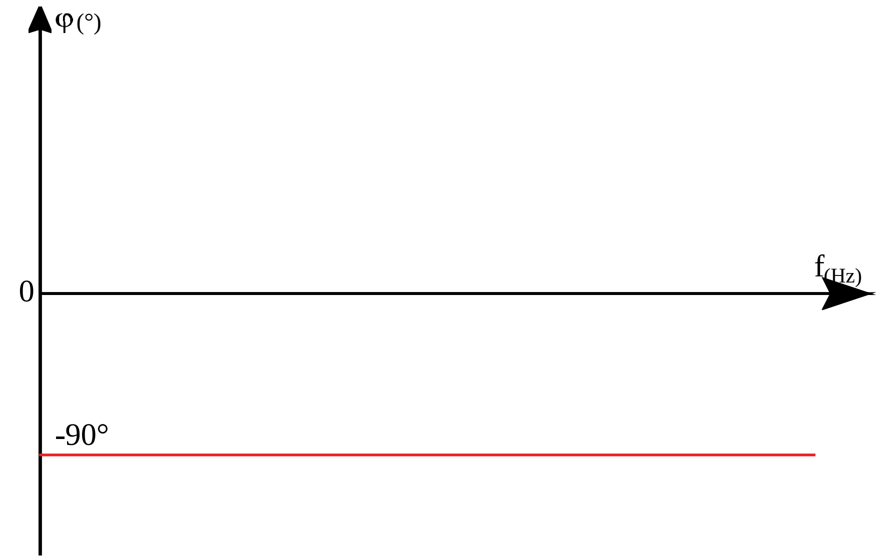
$$\underline{T}(j\omega) = K\frac{1}{j\omega} = -jK\frac{1}{\omega}$$

Imaginaire négatif

$$G(\omega) = -20\log(\omega)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$





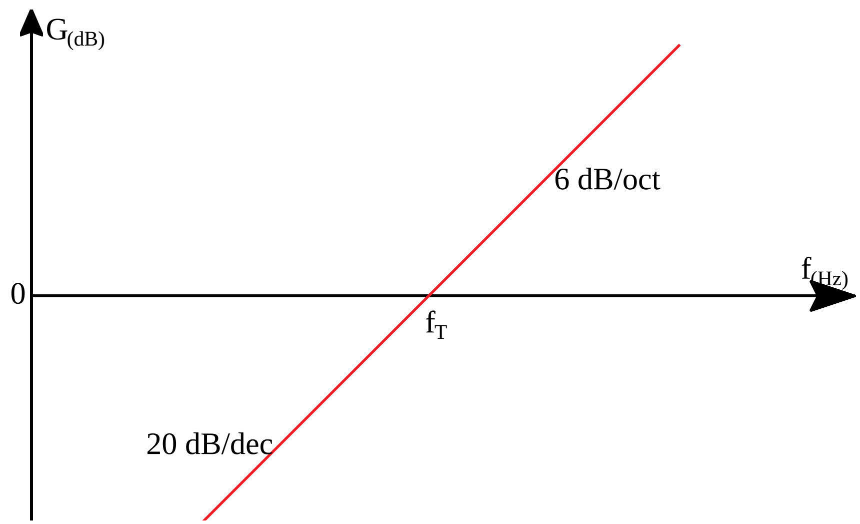
Instable : Gain infini à fréquence nulle

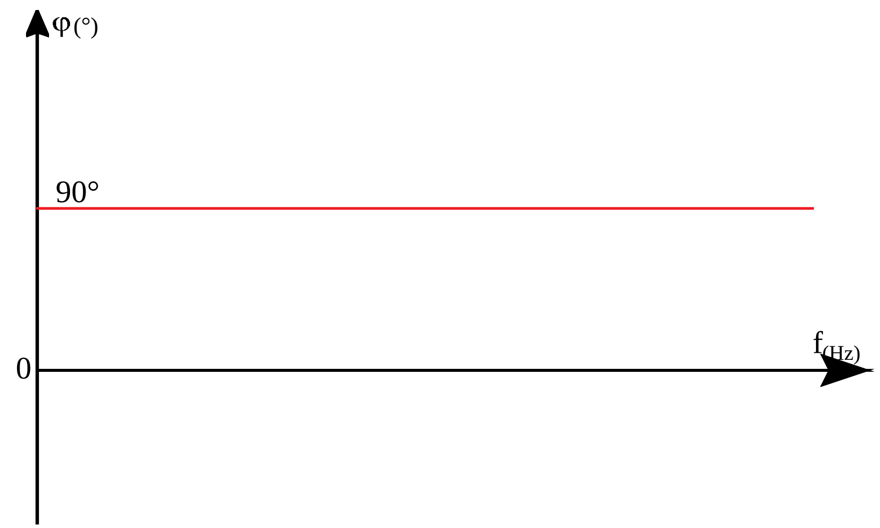
Le dérivateur

$\underline{T}(j\omega) = K\, j\omega$ Imaginaire positif

$G(\omega) = 20 \log(\omega)$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$





Instable en HF : $G(\infty) = \infty$

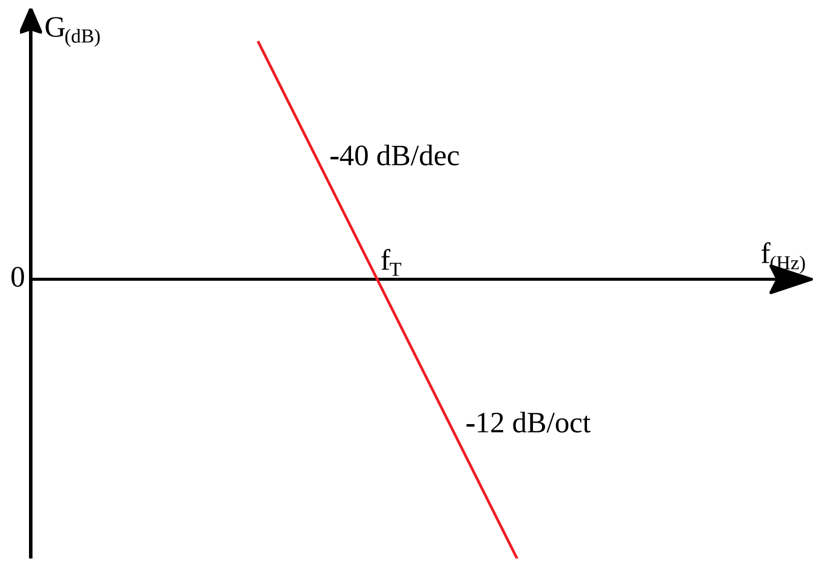
Le double intégrateur

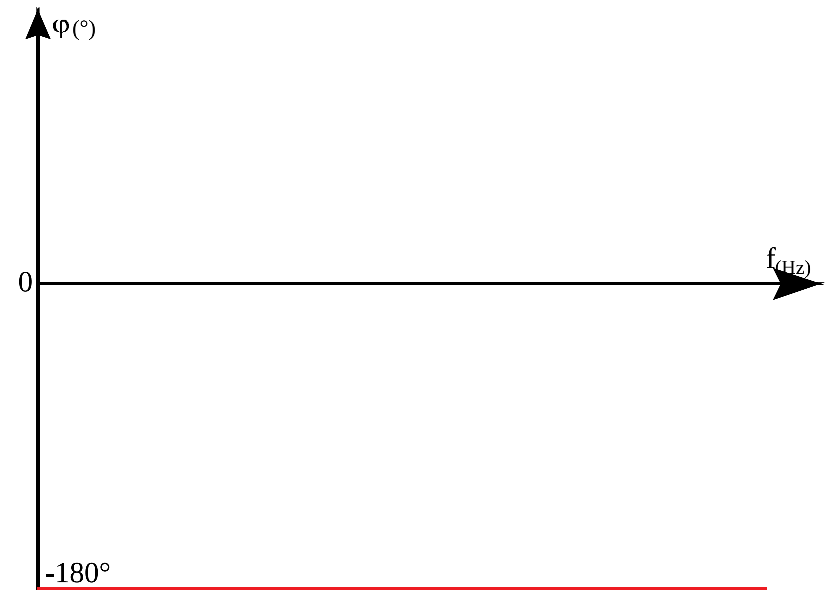
$$\underline{T}(j\omega) = K \frac{1}{(j\omega)^2} = - K \frac{1}{\omega^2}$$

Réel négatif

$$G(\omega) = -40 \log (\omega)$$

$$\varphi = - \pi$$



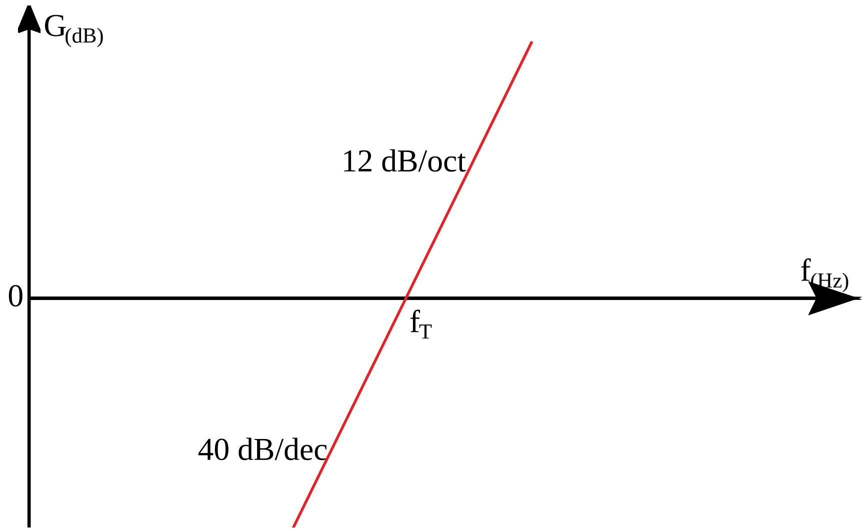


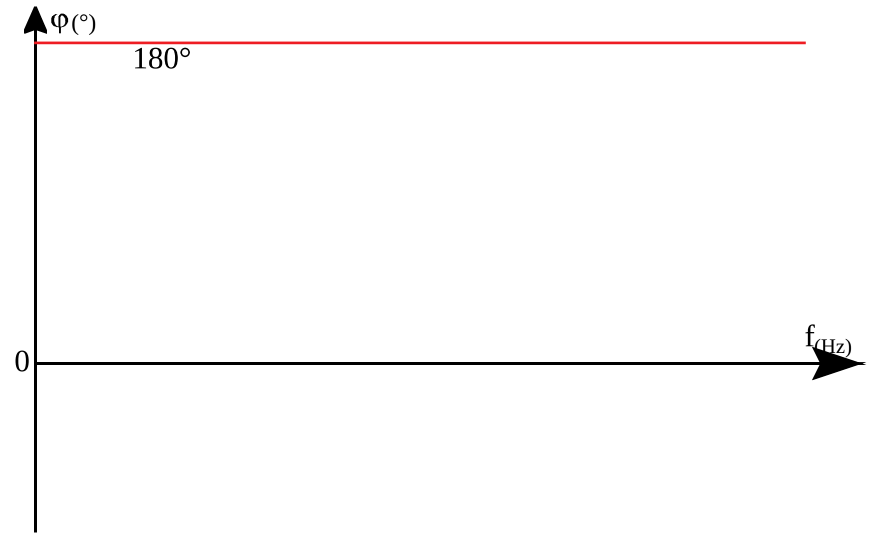
Instable : Gain infini à fréquence nulle

Le double dérivateur

$\underline{T}(j\omega) = K\,(j\omega)^2$ Réel négatif

$G(\omega) = 40 \log(\omega)$ $\varphi = \pi$





Instable en HF : $G(\infty) = \infty$