XII. ANALYSE DE CIRCUIT EN REGIME PERMANENT DE PETITS SIGNAUX

A. RAPPEL SUR LES SIGNAUX PERIODIQUES

Moyenne ; Parité ; Puissance ; Valeur efficace

B. SPECTRE DE FOURIER D'UN SIGNAL PERIODIQUE

Série de Fourier ; Spectre

C. LE REGIME HARMONIQUE

Fresnel ; Formalisme complexe ; Fonction de transfert

D. LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Fonction de transfert et signaux transitoires

A. RAPPELS SUR LES SIGNAUX PERIODIQUES

Soit u(t), une tension périodique de période T : u(t+T) = u(T)

et d'amplitude crète U_p. (Remarque : tension crète à crète : $U_{pp} = 2U_p$).

1. Moyenne

$$U_{av} = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t)dt$$ avec α, instant quelconque, souvent $\alpha = 0$

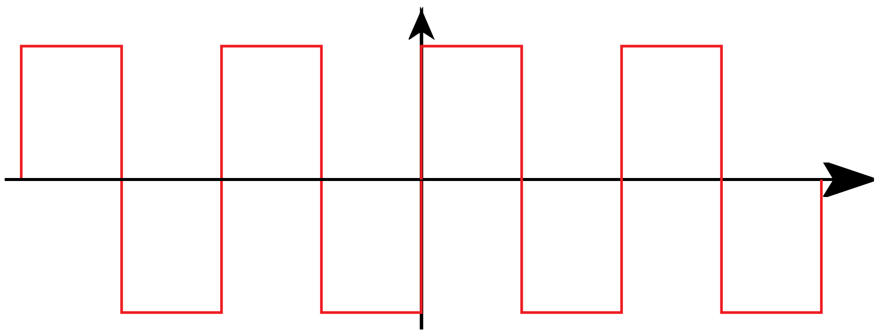
Un **petit signal** est une tension périodique de moyenne nulle (Uav = 0)

et d'amplitude faible devant les tensions continues présentes dans le circuit.

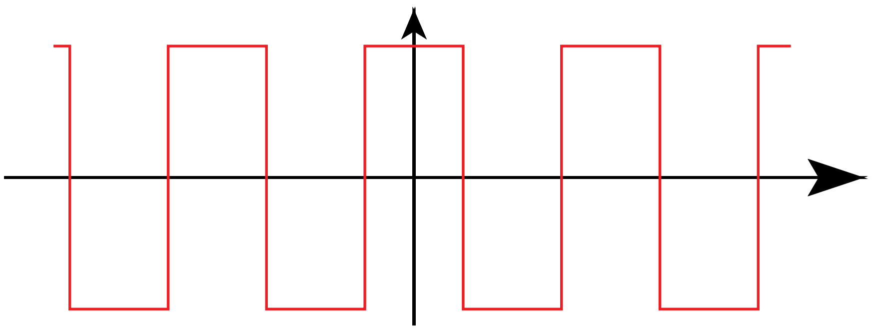
2. Parité (rappel)

Signal pair : u(-t) = u(t) Signal impair : u(-t) = -u(t)

La parité d'un petit signal (moyenne nulle) dépend souvent de sa phase :



Carré impair



Carré pair

3.°Puissance d'un signal périodique

Cas le plus simple : Puissance délivrée dans une résistance R

(pas de déphasage entre tension et courant).

Puissance instantanée : $p(t) = u(t)i(t) = u^2(t)/R$

Puissance moyenne : $$P_{av} = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} \frac{u^2(t)}{R}dt$$

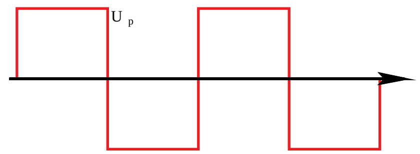
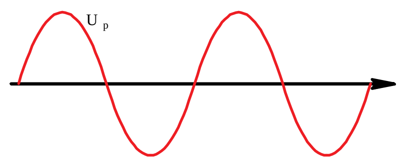
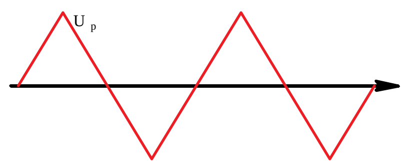
4. Tension efficace

La valeur efficace U_{rms} de u(t) est utilisée pour rapprocher le calcul des puissances des petits signaux, du calcul des puissances continues, .

$$U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u^2(t)dt} \quad \text{et} \quad P_{av} = \frac{U_{rms}^2}{R}$$

RMS : Root Mean Square

a. Application aux signaux périodiques standards

Signal	Aspect	P_{av}	U_{rms}
Carré		$\frac{U_p^2}{R}$	U_p
Sinusoïdal		$\frac{U_p^2}{2R}$	$\frac{U_p}{\sqrt{2}}$
Triangulaire		$\frac{U_p^2}{3R}$	$\frac{U_p}{\sqrt{3}}$

b. Cas d'une tension sinusoïdale appliquée à un dipôle quelconque

$P_{av} = U_{rms}\, I_{rms} \cos(\varphi)$, avec φ le déphasage entre u(t) et i(t)

B. SPECTRE DE FOURIER D'UN SIGNAL PERIODIQUE

Joseph Fourier (1768-1830) a montré en 1807 que toute fonction périodique u(t) de fréquence f = 1/T peut être décomposée en une somme infinie (une série) de fonctions sinusoïdales dont les fréquences sont des multiples entiers de f.

$$\boxed{u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)}$$

1. Décomposition en série de Fourier de u(t), de période $T = 2\pi/\omega$

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

avec: $a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t)dt$, la composante continue (U_{av} ou U_{offset})

et : $k \neq 0$ $\quad a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t)\cos(n\omega t)\, dt$

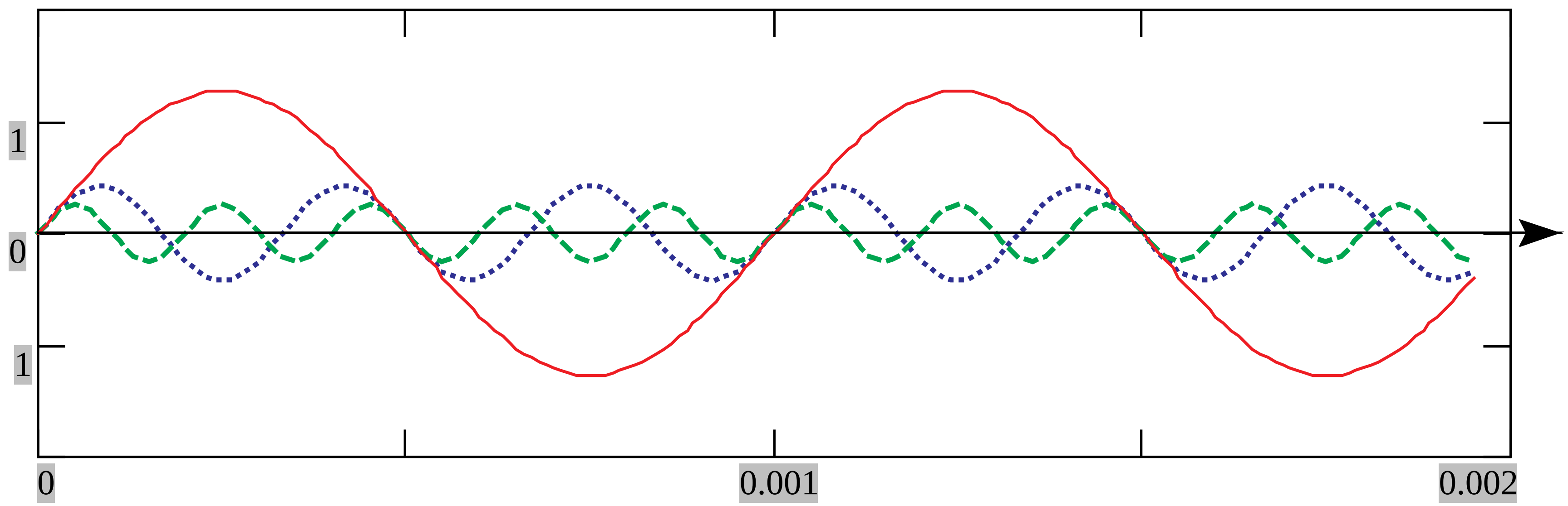
et : $k \neq 0$ $\quad b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t)\sin(n\omega t)\, dt \int_0^T S(t)dt$

(avec α, instant quelconque, souvent $\alpha = 0$)

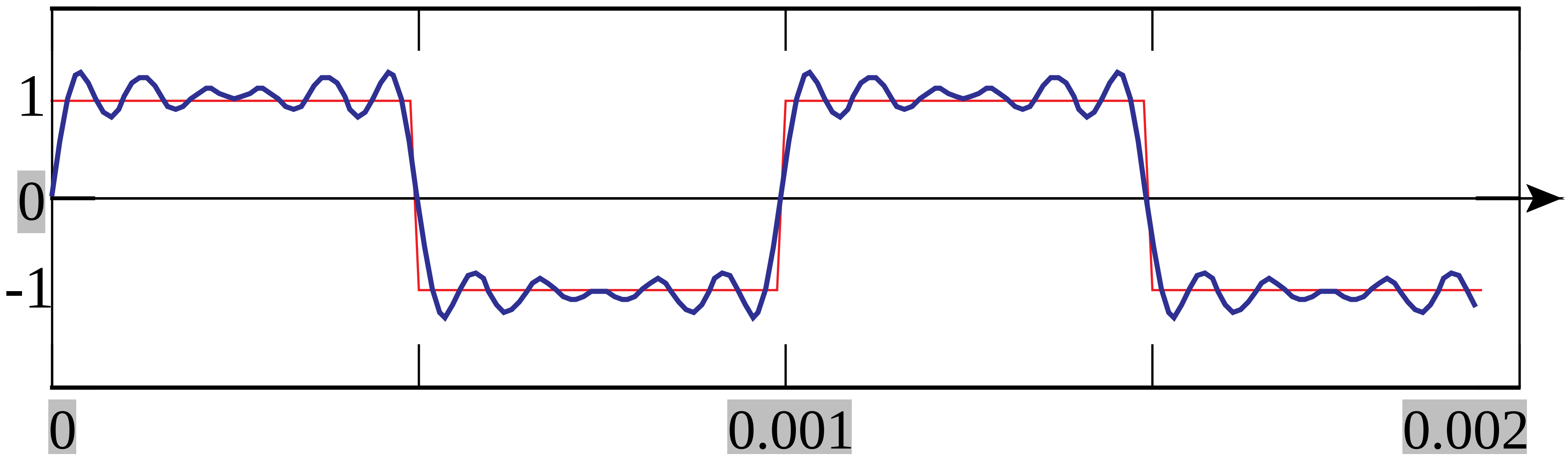
Décomposition d'un signal carré d'amplitude U_p tel que $u(0) = 0$

$$\mathbf{b_n = \frac{4U_p}{n\pi}} \quad \text{n impair} \qquad a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_{2p} = 0$$

Rang	1f	3f	5f	7f	9f
U_p (%)	100	33	20	14	11



3 premières composantes d'un carré



Carré reconstitué avec ses 3 première harmoniques

2. Forme complexe de la série de Fourier

$$\mathbf{u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{jn\omega t}}$$

$$u(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{-jn\omega t}$$

$$\text{avec : } c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t)e^{-jn\omega t}dt$$

$$c_0 = a_0 \quad \text{et si } n \neq 0 : \qquad c_n = \frac{a_n + jb_n}{2} \qquad \text{d'où} \quad \overline{c_n} = c_{-n}$$

3. Analyse spectrale(ou harmonique) et transformée de Fourier

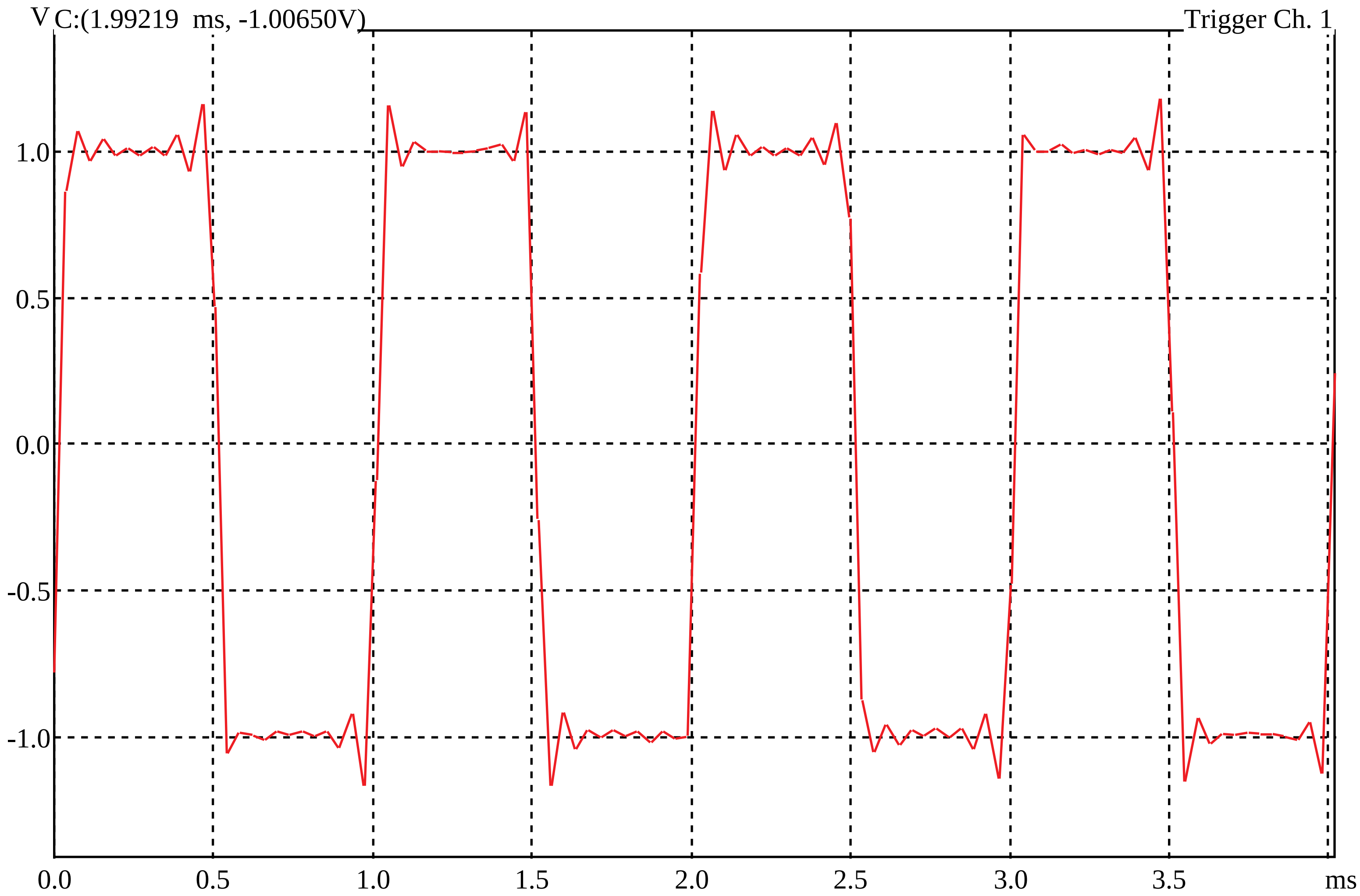
La série de Fourier d'une tension périodique peut aussi s'écrire ainsi :

$$\mathbf{u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)}$$

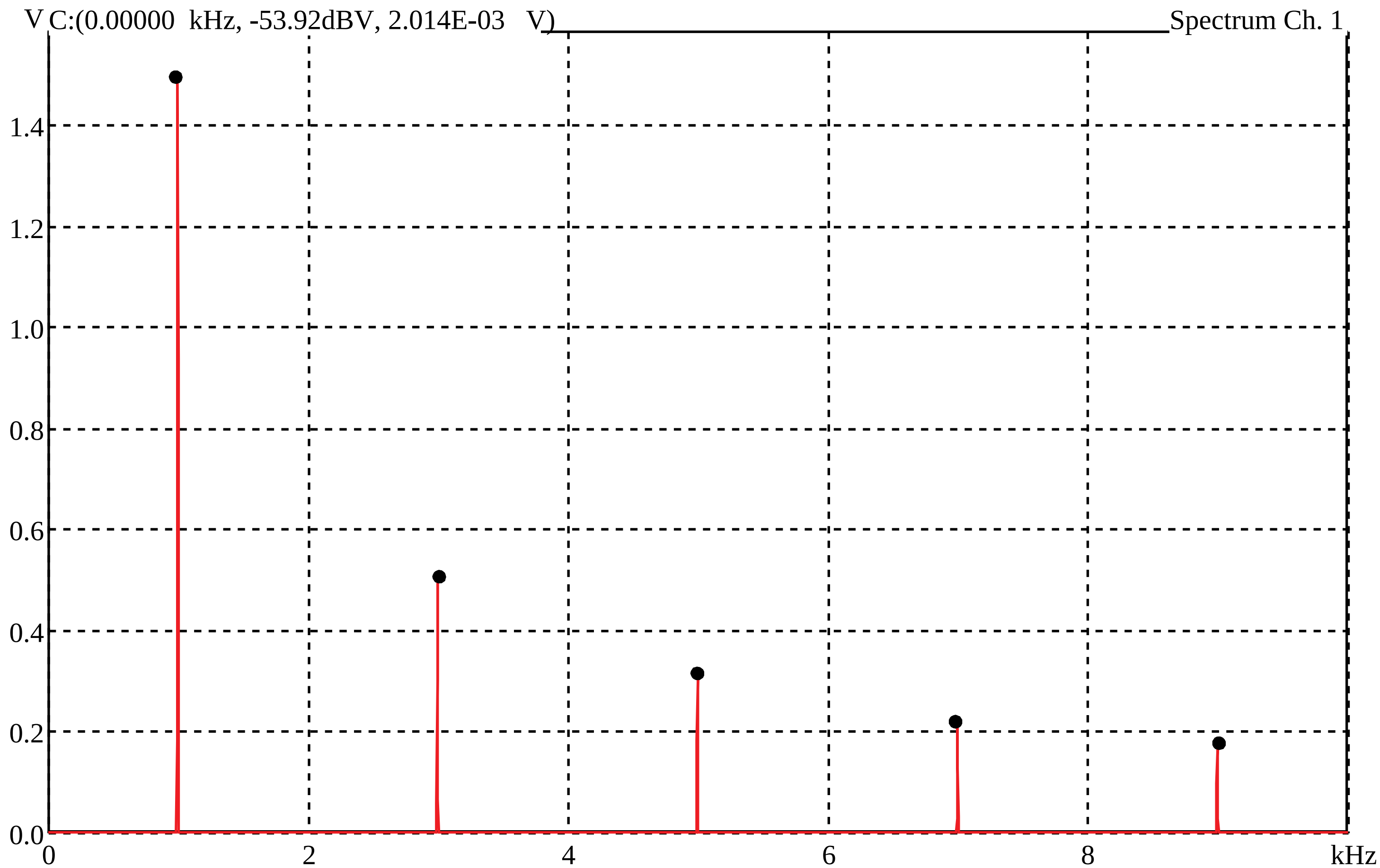
avec : $nf = n\omega/2\pi$, la fréquence de l'harmonique de rang n

$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, l'amplitude de l'harmonique de rang n

$\varphi_n = \arctan(b_n/a_n)$, la phase de l'harmonique de rang n

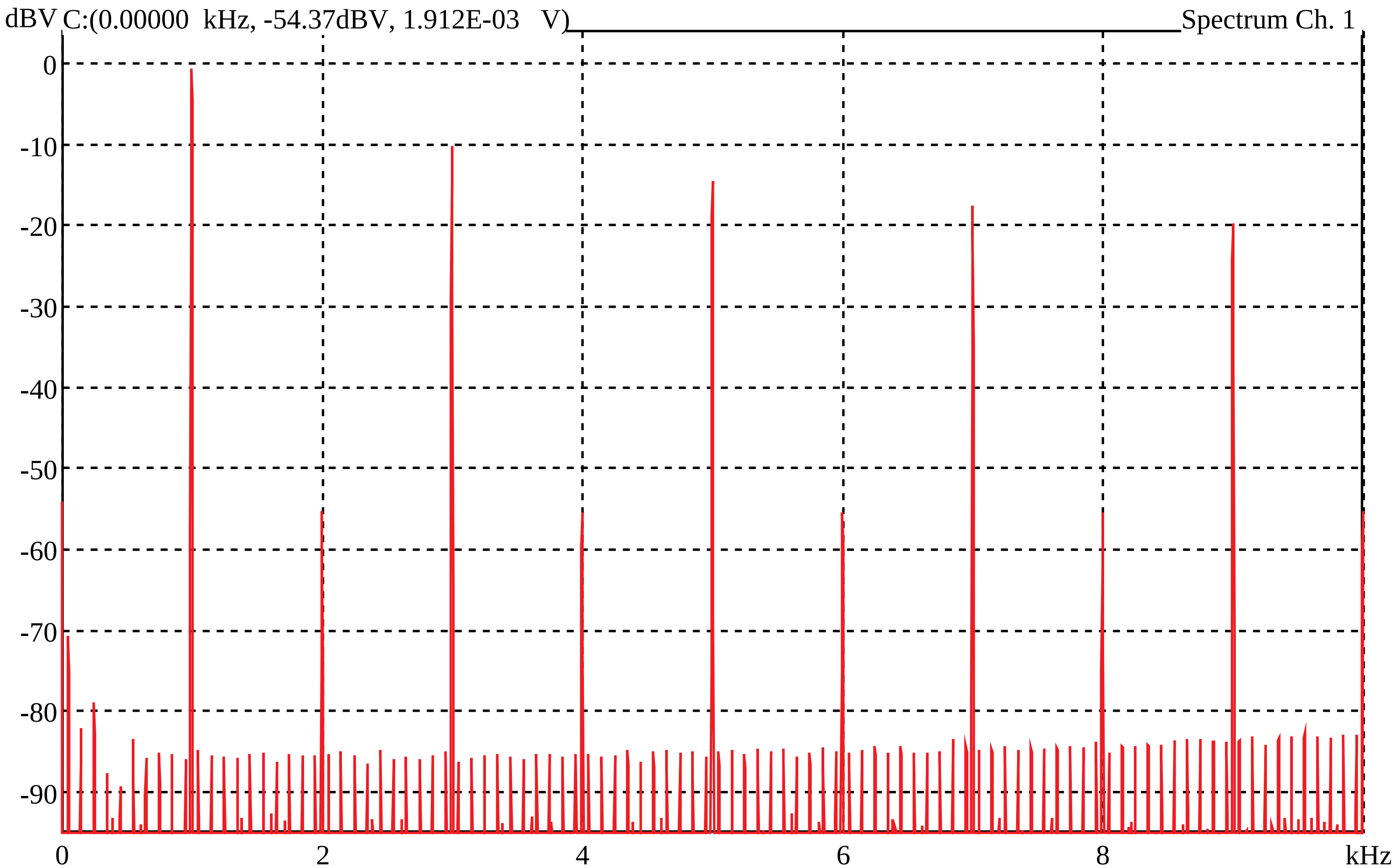


Chronogramme d'un signal carré de 1 kHz échantillonné



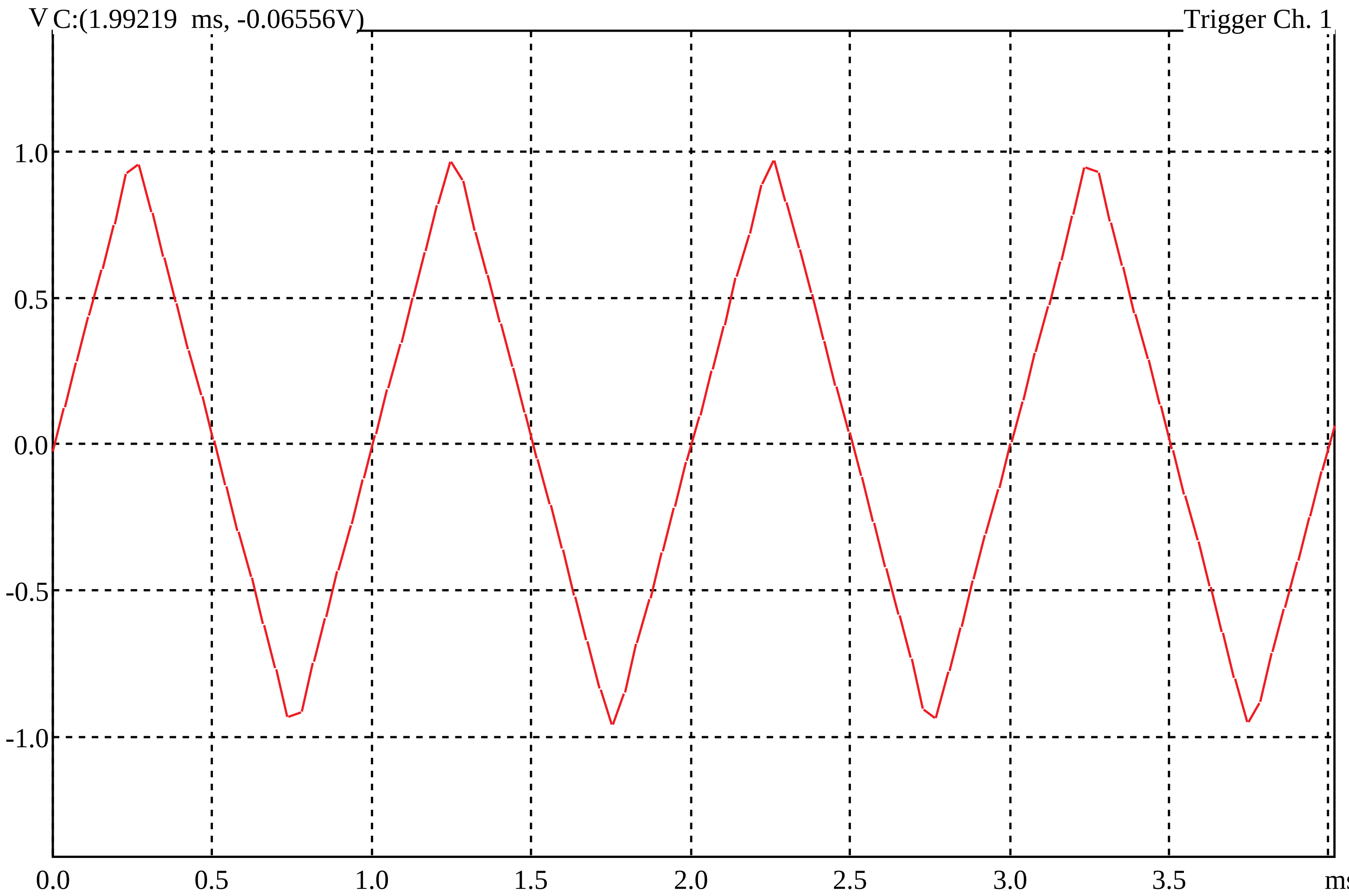
Spectre d'un signal carré de 1 kHz, ordonnée linéaire.

Rang	1f	3f	5f	7f	9f
U_P (%)	100	33	20	14	11

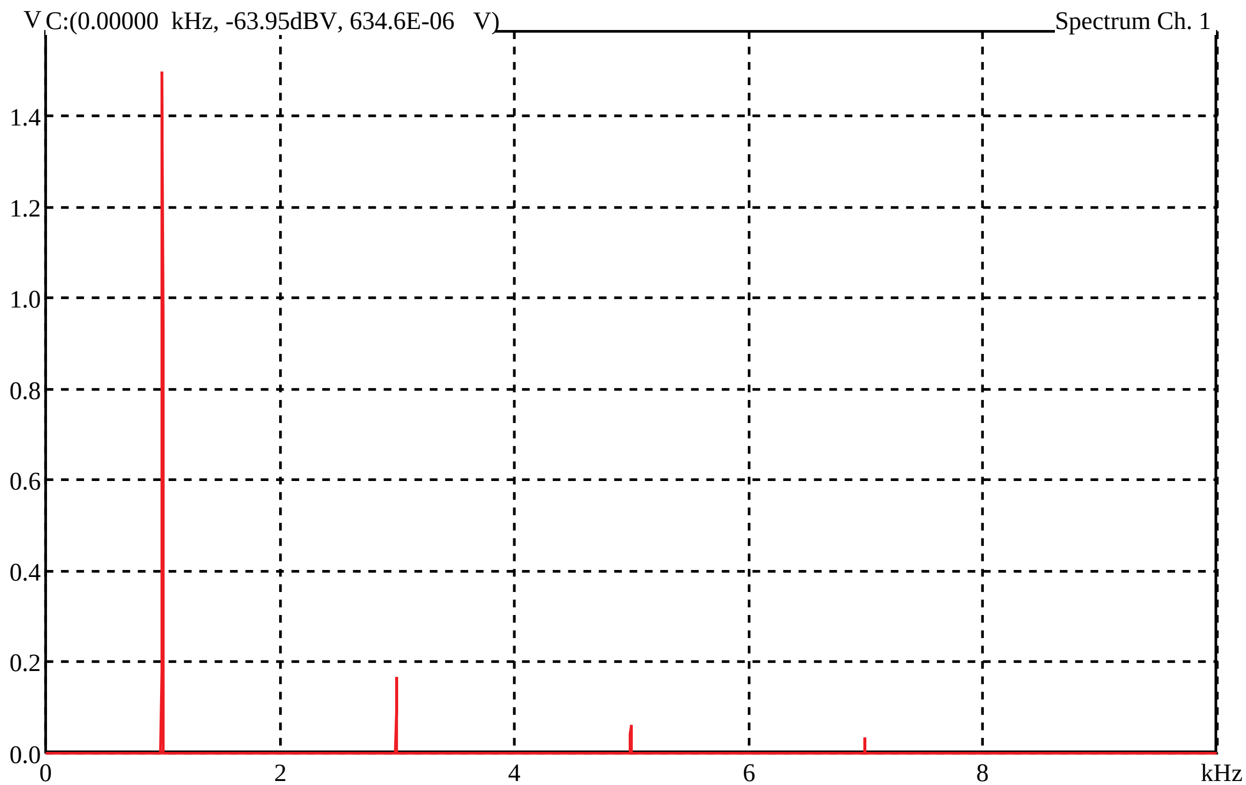


Spectre d'un signal carré de 1 kHz, ordonnée en dB.

L'harmonique 1f, qui a la même fréquence que u(t) est appelée fondamentale.

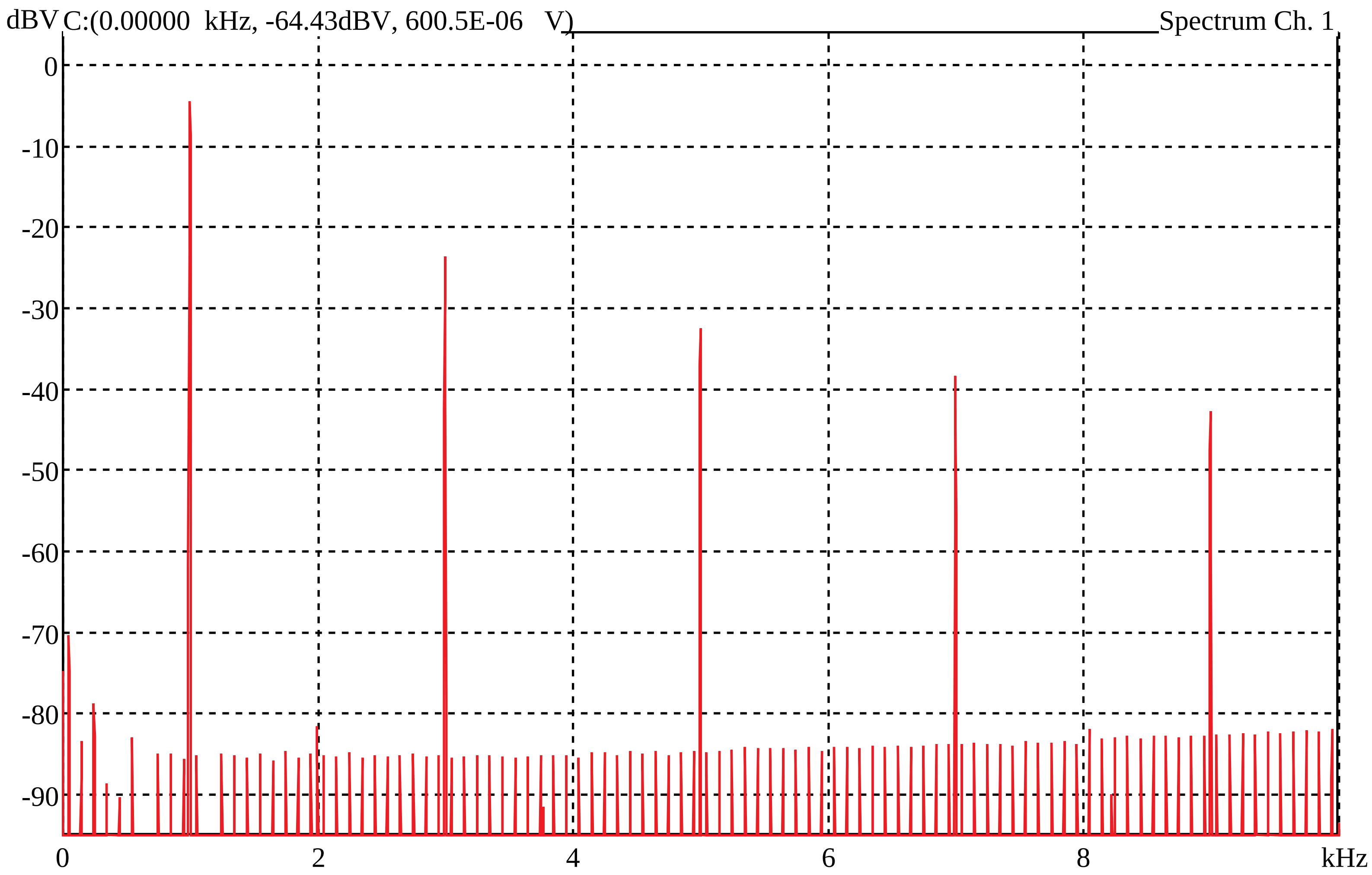


Chronogramme d'un triangle de 1 kHz échantillonné



Spectre d'un signal triangulaire de 1 kHz, ordonnée linéaire.

Rang	1f	3f	5f	7f	9f
U_p (%)	100	11	4	2	1.23



Spectre d'un signal triangulaire de 1 kHz, ordonnée en dB.

4. Formule de Parseval

Relation entre les coefficients de Fourier d'un signal et sa valeur efficace :

$$U_{rms}^2 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

5. Taux de distortions

Indique la "pureté" (proximité au sinus) d'un signal :

$$D = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2}}{A_1}$$

C. LE REGIME HARMONIQUE

(ou régime permanent de petits signaux sinusoïdaux)

D'après Fourier, tout signal périodique peut se décomposer en une série (somme infinie) de fonctions sinusoïdales affectée de coefficients.

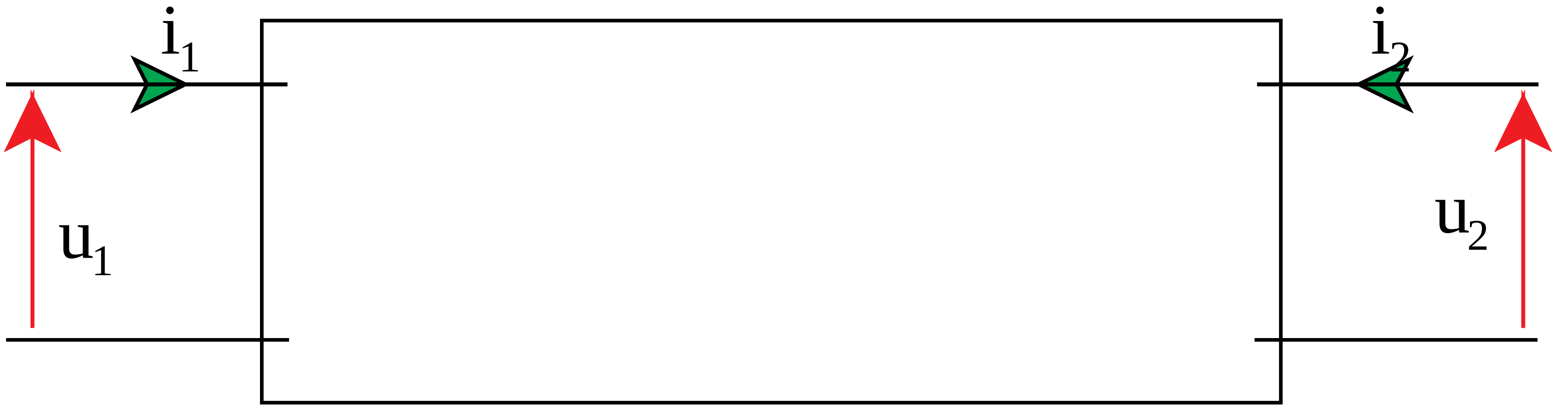
Soit un **quadrupôle linéaire** qui reçoit un signal périodique $u_1(t)$.

Pour connaître le signal se sortie $u_2(t)$, il suffit de connaître la sortie $s_2(t)$ du système quand il reçoit à l'entrée un signal sinusoïdal $s_1(t)$ de fréquence quelconque. **$u_2(t)$ est la somme des réponses du système à chaque harmonique du signal d'entrée $u_1(t)$**.

Pour connaître entièrement le comportement d'un système, il est suffisant de n'étudier que sa réponse à un signal sinusoïdal (signal harmonique)

1. Le régime harmonique

Soit un quadrupôle standard.



A l'entrée : $u_1(t) = U_1\cos(\omega t)$ A la sortie : $u_2(t) = U_2\cos(\omega t + \varphi)$

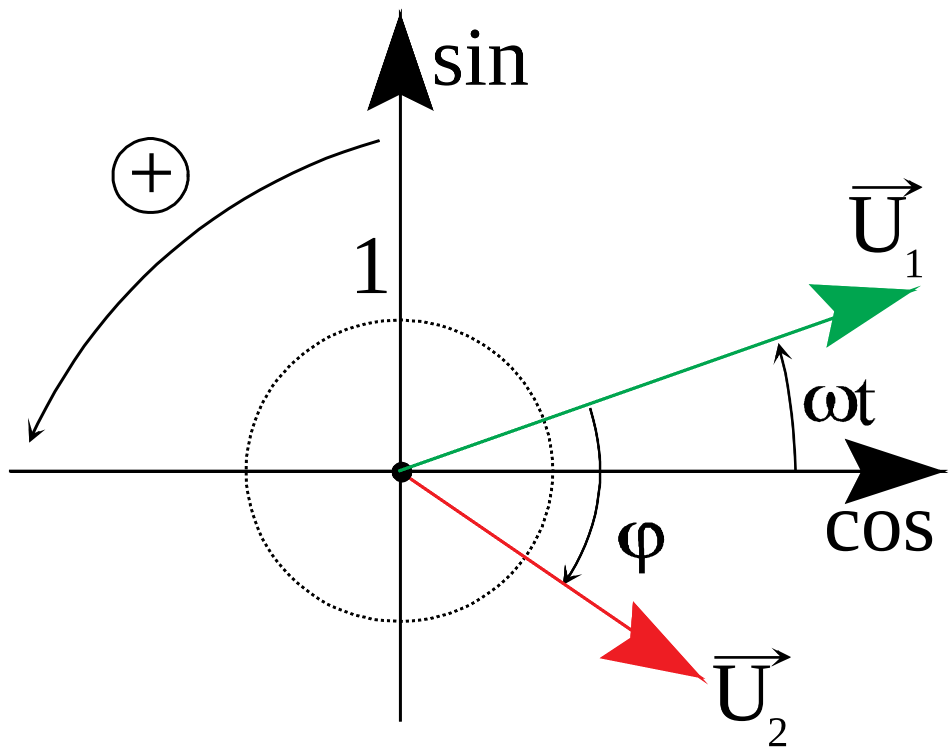
φ est le déphasage entre u_1 et u_2 :

$\varphi < 0 \Leftrightarrow u_1$ est en retard sur u_1

$\varphi > 0 \Leftrightarrow u_1$ est en avance sur u_1

2. Le diagramme de Fresnel (1788 - 1827)

Il consiste à supposer que $u_1(t)$ est la projection sur un axe de l'extrémité d'un vecteur $\vec{U_1}$ tournant dans le sens trigonométrique à la pulsation ω.



Principe du diagramme de Fresnel

La rotation n'est pas représentée et $\vec{U_1}$ est pris comme origine des phases.

La norme de chaque vecteur est l'amplitude crète du signal correspondant

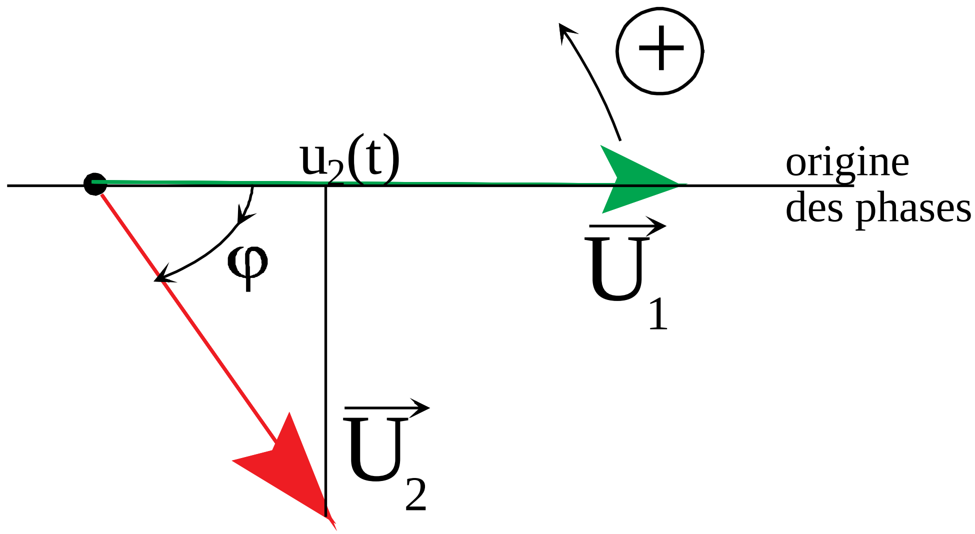


Diagramme de Fresnel

L'angle entre chaque vecteur et $\vec{U_1}$ est le déphasage du signal correspondant.

3. Formalisme complexe : Linéariser les équations différentielles.

Plan de Fresnel $\Leftrightarrow$ Plan complexe

C'est la représentation la plus commode du régime harmonique.

Chaque signal est assimilé à la partie réelle d'un nombre complexe :

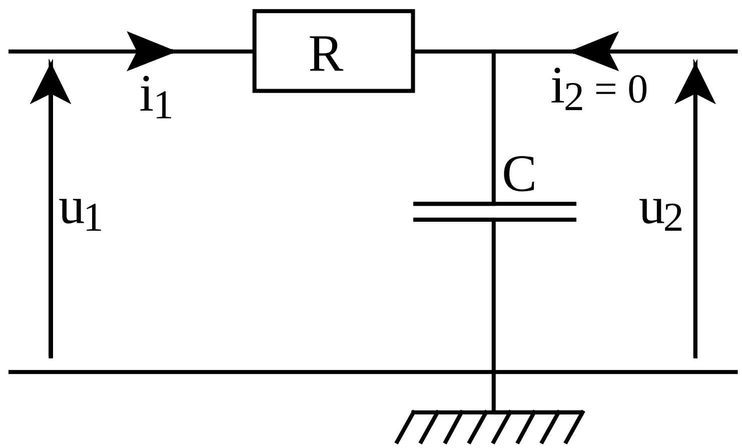
$$\boxed{\underline{u}(t) = Ue^{j\omega t} = U(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) \qquad \text{avec } j^2 = -1}$$

$$u(t) = \mathrm{Re}(\underline{u}(t)) = U\cos(\omega t)$$

L'intérêt de ce formalisme est de simplifier les calculs différentiels :

$\dfrac{d\underline{u}}{dt} = j\omega\, Ue^{j\omega t} = j\omega\,\underline{u}$	$\displaystyle\int_0^t \underline{u}(x)\,dx = \frac{1}{j\omega}Ue^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\underline{u}$
La dérivée est un produit	La primitive est une fraction

Exemple du filtre R-C standard :



Equation différentielle du circuit :

$$RC\frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

En régime harmonique :

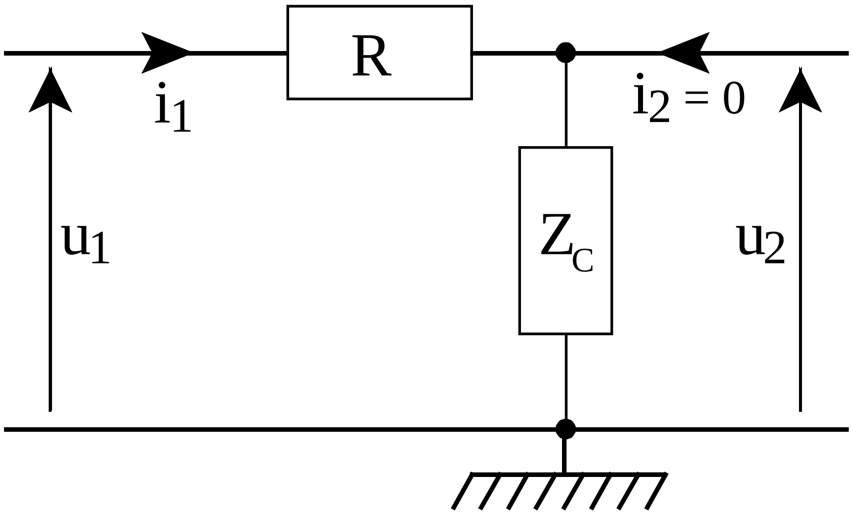
$$j\omega RC\,\underline{u_2} + \underline{u_2} = \underline{u_1}$$

Dans le formalisme complexe, il est possible de définir l'impédance (homogène à une résistance) des bobines et des condensateurs :

Bobine :	Condensateur :
$\underline{Z}_L = \frac{u}{i} = \mathbf{j\omega L}$	$\underline{Z}_C = \frac{u}{i} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{j\omega C}} = \frac{\mathbf{-j}}{\omega C}$

4. Fonction de transfert d'un quadrupôle

Exemple du filtre R-C



$$\underline{u}_2 = \frac{Z_C}{Z_C + R}\,\underline{u}_1$$

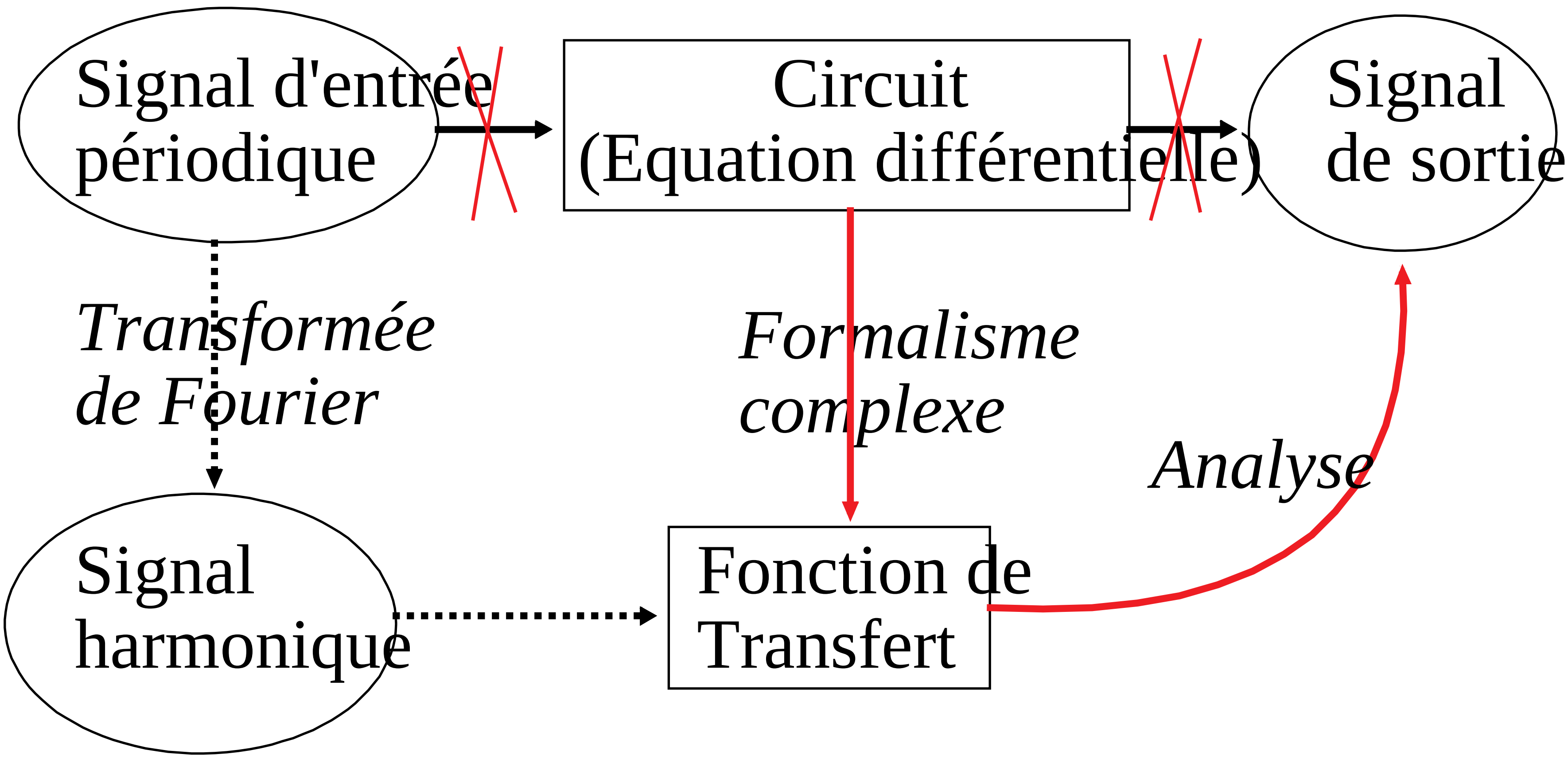
$$\Rightarrow \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$\underline{T}(j\omega)$ est la **fonction de transfert** du circuit.

Le filtre R-C standard est un pont diviseur en sortie ouverte :

Atténuation (ou amplification) : $U_1/U_2 = |\underline{T}(j\omega)|$

Déphasage entre $u_2(t)$ et $u_1(t)$: $\varphi = \arg(\underline{T}(j\omega))$



Méthode de travail avec les fonctions de transfert complexes

Règles d'écriture d'une fonction de transfert :

C'est une fraction rationnelle de polynômes en $j\omega$ à coefficients réels.

$$\boxed{\underline{T}(j\omega) = k\,\frac{1 + a_1 j\omega + a_2(j\omega)^2 + a_3(j\omega)^3 + \dots}{1 + b_1 j\omega + b_2(j\omega)^2 + b_3(j\omega)^3 + \dots}}$$

La partie réelle de ces polynômes doit toujours être égale à 1.

L'ordre du dénominateur est l'ordre du filtre étudié

D. LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) a proposé une méthode de résolution des équations différentielles par une transformation qui est une généralisation de la transformation de Fourier.

Pratiquement, la variable $j\omega$ est remplacée par le complexe $p = \alpha + j\omega$

$$\boxed{F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \quad \text{et} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))}$$

F(p) est la transformée de Laplace de f(t) fonction du temps ($f(t<0) = 0$).

1. Elle permet de traiter les signaux transitoires (non périodiques)

Dans le formalisme de Laplace, les fonctions de transfert sont des fractions de polynômes en p (au lieu de jω). Exemple du filtre R-C :

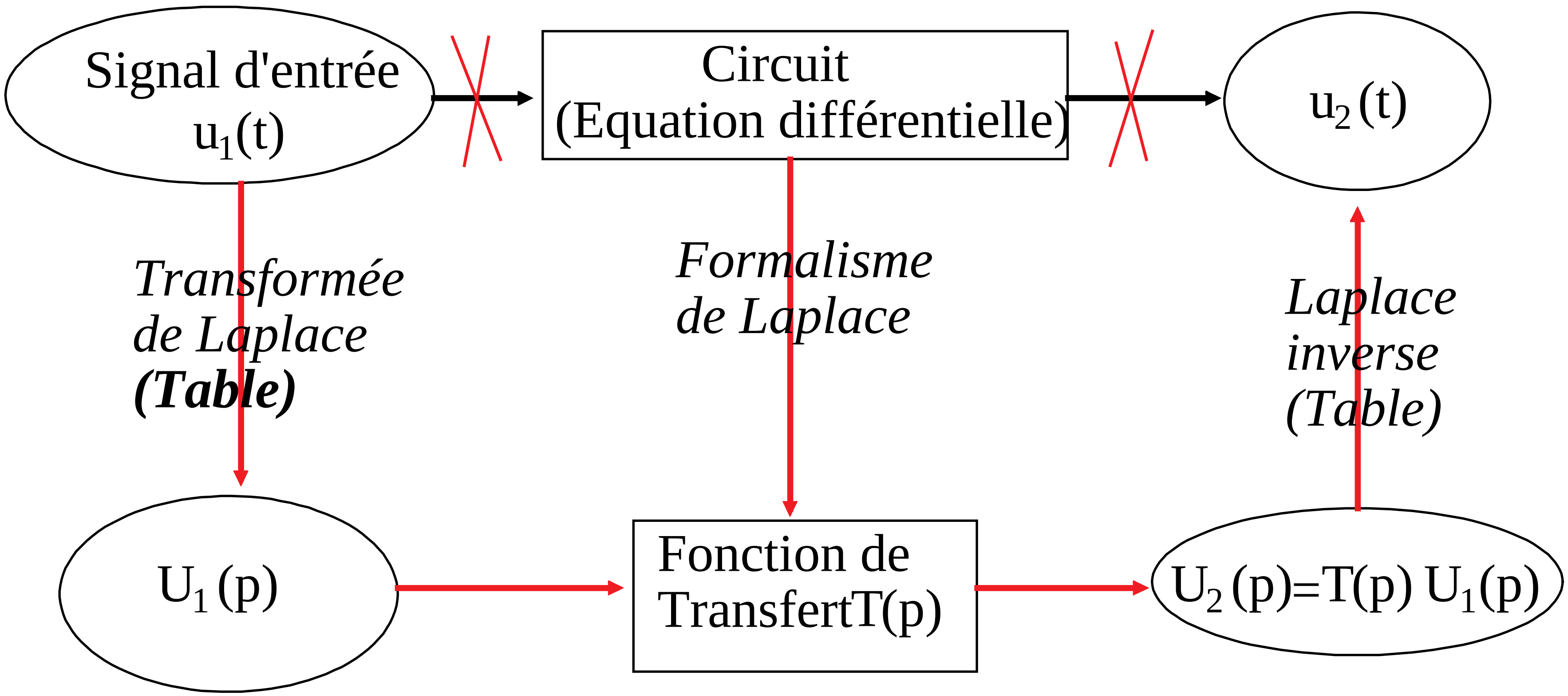
$$\underline{T}(p) = \frac{1}{1 + pCR}$$

Cette forme de la fonction de transfert permet de connaître la réponse du système dans le cas des signaux d'entrée transitoires (≠ régime permanent).

Une fonction fondamentale est **$\mathcal{U}$(t), la fonction échelon**, dite de Heaviside,

telle que $\mathcal{U}(t<0) = 0$ et $\mathcal{U}(t>0) = 1$: $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = 1/p$

En pratique, la transformation de Laplace d'une fonction s'obtient par une mise en forme (changement de variable, ...) de la fonction de façon à la décomposer en fonctions dont la transformée est donnée par une **table des transformées de Laplace** (table jointe).



Méthode de contournement des équations différentielles

2. Exemple du filtre R-C soumis à un échelon

$$u1(t) = \mathcal{U}(t) \quad \Rightarrow \quad U1(p) = 1/p \qquad \text{(table)}$$

$$T(p) = \frac{1}{1 + pCR} \quad \Rightarrow \quad U2(p) = \frac{1}{p}\,\frac{1}{1 + pCR}$$

$$\Rightarrow \quad u2(t) = \mathcal{U}(t)(1\text{-}e^{-t/RC})$$

Soit la courbe typique de la tension de charge de C.